

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 2500 — Geometri

Eksamensdag: 26. november 2024

Tid for eksamen: 15.00 – 19.00

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Eksamen inneholder 11 deloppgaver som hver teller 5 eller 10 poeng. Du skal begrunne alle svar og vise nok mellomregning til at en lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1 (10pt)

Tre sirkler C_1, C_2, C_3 i planet tangerer hverandre utvendig. Tegn figur og vis at de tre linjene fra sentrum i hver sirkel til tangeringspunktet mellom de to andre konkurrerer (har et felles punkt).

Oppgave 2

I det konvekse polyederet P er alle sideflater regulære trekanter eller regulære tikanter. I hvert hjørne møtes to tikanter og en trekant.

2a (10pt)

Hvor mange hjørner har P ?

(Fortsettes på side 2.)

2b (10pt)

Hvor mange trekanter og hvor mange tikanter er der blant sideflatene i P ?

2c (10pt)

P er et platonsk legeme med avkuttete hjørner. Hvilket legeme og hvor mye av hjørnene er kuttet?

Oppgave 3

La A være punktet $(5, 0)$ og C være sirkelen med sentrum i $(0, 0)$ og radius 3.

3a (5pt)

Vis at den korteste avstanden fra et punkt P med koordinater (x, y) til et punkt på sirkelen er $|\sqrt{x^2 + y^2} - 3|$.

3b (10pt)

Likningen til det geometriske stedet for punkter som har samme avstand til A som sin korteste avstand til C er likningen til et kjeglesnitt. Finn denne likningen, og finn sentrum og symmetriakser til kjeglesnittet. Hvor er det geometriske stedet på kjeglesnittet?

Oppgave 4

La P være polyederet med hjørner i de seks punktene $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Et polyeder Q har hjørner i midtpunktene til sideflatene i P .

(Fortsettes på side 3.)

4a (5pt)

Finn koordinatene til hjørnene i Q . Hva slags polyeder er Q ?

4b (10pt)

Lag et regulært tetraeder T ved å velge fire av hjørnene i Q . Begrunn valget.

Hva er volumet til P , til Q og til T ?

(hint: Bruk at volumet til en pyramide med grunnflateareal G og høyde h er $\frac{G \cdot h}{3}$)

Oppgave 5**5a (10pt)**

I det projektive planet med homogene koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$ finn, for hvert reelt tall b , likningen til linja L_b gjennom punktene $(0 : -1 : 1)$ og $(1 : -b : 0)$. Er linjene L_b alle linjer gjennom $(0 : -1 : 1)$? Begrunn svaret.

5b (10pt)

For hvert reelt tall a , la C_a være kurven med likningen

$$x_0^2 + ax_1^2 + 2ax_1x_2 - 3x_2^2 = 0.$$

Hva slags kjeglesnitt er C_a i det affine planet der $x_0 \neq 0$, når $a = -1$?

5c (10pt)

For hvilke reelle verdier av a vil alle linjer gjennom $(0 : -1 : 1)$ ha felles punkter med C_a ? (hint: Se hva slags kjeglesnitt C_a er i det affine planet der $x_2 \neq 0$.)