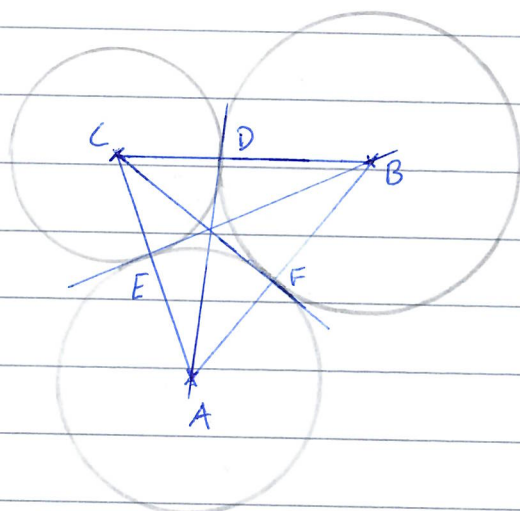


1

De tre cirklerne har centrum og radius A, r_A , B, r_B og C, r_C og tangerer hinendene i F, D og E som i figuren.

Da er

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = \frac{r_A}{r_B} \cdot \frac{r_B}{r_C} \cdot \frac{r_C}{r_A} = 1 \quad (*)$$

Med fortegn er alle delingsforholdene positive siden F, D, E ligger inde i trekanten $\triangle ABC$. Siden produktet af delingsforholdene er 1 (*), så følger det af Ceva's sætning at AD, BE og CF har et fælles punkt!

2

1 polyeder P har sideflader som er trekanter vinkler på $\frac{\pi}{3}$, mens sideflader som er tilkanter har vinkler som er $\pi - \frac{2\pi}{10} = \frac{4\pi}{5}$.

Siden der er to tilkanter og en trekant i

hvert hjørne, er hjørnedefekten $2\pi - \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{4\pi}{5} = \frac{\pi}{15}$

Siden summen af hjørnedefekterne er 4π , er der $4 \cdot 15 = 60$ hjørner.

a)

2b La $v = 60$ være antall hjørner,
 e antall kanter og f antall sideflater.
 Da er $v - e + f = 2$ (*) siden P er lukket.

Derom f_3 er antall trekanter sideflater og
 f_{10} er antall ti-kantede sideflater så
 er

$$f_3 + f_{10} = f, \quad (**)$$

$$3f_3 + 10f_{10} = 2e \quad (***)$$

$$\text{og } 3f_3 + 10f_{10} = 3v = 180.$$

$$\text{Så } 2e = 180, \text{ og dermed } e = 90.$$

Si av (*), ~~er~~ får vi

$$60 - 90 + f = 2, \text{ så } f = 32$$

$$60 - \frac{1}{2}(3f_3 + 10f_{10})$$

og av (**) og (***)

$$f_3 + f_{10} = 32$$

$$3f_3 + 10f_{10} = 180$$

$$\text{er } (3f_3 + 10f_{10}) - 3(f_3 + f_{10}) = 180 - 96,$$

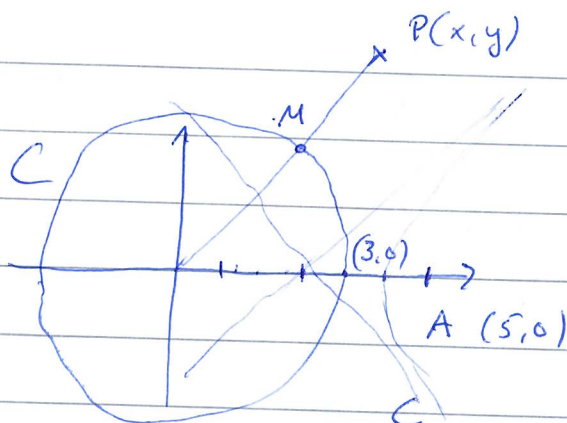
$$\text{så } 7f_{10} = 84, \text{ og } f_{10} = \frac{84}{7} = 12$$

$$\text{Dermed er } f_3 = 32 - f_{10} = 32 - 12 = 20$$

Så P har 12 ti-kantede og 20 trekanter sideflater.

2c Et dodekaeder har 12 femkanter sideflater og
 20 hjørner. Om en kutter hvert hjørne
 i en likesidet trekant, slik at fem kantene blir
 til regulære ti-kanter får en P som i a og b.

3.



Sirkelen har ligning $x^2 + y^2 = 9$

3a

Afstanden fra $P(x,y)$ til $(0,0) \sim \sqrt{x^2 + y^2}$.
 Korte afstand fra P til sirkelen måles
 langs linjestykket fra P til $(0,0)$,
 nemlig PM som har lengde

$$PM = |\sqrt{x^2 + y^2} - 3|$$

Bruker talverdi, for om P er inne i sirkelen
 er $|\sqrt{x^2 + y^2} - 3| < 0$.

3b~~PM~~

Om P har samme afstand til C som til A
 så er

$$PM = PA$$

 $P = (x,y)$

$$PM = |\sqrt{x^2 + y^2} - 3| \quad \text{og} \quad PA = \sqrt{(x-5)^2 + y^2}$$

$$\text{Så} \quad (\sqrt{x^2 + y^2} - 3)^2 = (\sqrt{(x-5)^2 + y^2})^2$$

$$x^2 + y^2 + 9 - 6\sqrt{x^2 + y^2} = (x-5)^2 + y^2$$

$$10x - 25 + 9 = 6\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$5x - 8 = 3\sqrt{x^2 + y^2}$$

$$25x^2 - 80x + 64 = 9x^2 + 9y^2$$

$$16x^2 - 80x + 100 - 9y^2 = -64 + 100 = 36$$

$$16\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - 9y^2 = 36$$

x.

Likningen til det geometriske sted er

$$\frac{(x - \frac{5}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Det er likningen til en hyperbel med
 reel halvakse $\frac{3}{2}$, imaginær halvakse 2
 og centrum i $(\frac{5}{2}, 0)$.

Den reelle halvaksen ligger på x-aksen ^(y=0) som er
 symmetriakse. Den andre symmetriaksen
 er $x = \frac{5}{2}$.

Det er bare punktene på hyperbelen med
 x-koordinat større eller like 4 som oppfyller
 kravene til det geometriske sted så det
 er den ene hyperbelgreina ($x \geq 4$) som
 er dette geometriske sted.

4. P har hjørner i $(\pm 1, 0, 0)$ $(0, \pm 1, 0)$ $(0, 0, \pm 1)$.

Midt sideflatene til P er en i hver del av
 rommet bestemt av fortegnstil koordinatene:

+++ : Midt punkt i flaten med positive koordinater er $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

++- : $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

+ -+ : $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

-++ : $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

+-- : $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

-+- : $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$

--+ : $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$

--- : $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

(*) Midtpunktet er gjennomsnitt av hjørnene: $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}((1, 0, 0) + (0, 1, 0) + (0, 0, 1))$.

Midtpunktene er hjørner i polyedret Q.

Så Q har 8 hjørner i $(\pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{3})$ og er en kube (hexaeder).

46 Hjørnene $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}), (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ er hjørnene i et tetraeder (regulært tetraeder), siden alle sidekantene har ^{like} længde.

$$\sqrt{(\frac{1}{3} + \frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{3})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Siden P er en dobbeltpyramide (oktaeder) så er volumet til P

$$2(\text{volumet til 4-kantet pyramide med højde 1}) \\ = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 1 = \frac{8}{9}$$

Volumet til terningen/kuben Q er $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$ siden alle sidekanter har længde $\frac{2}{3}$.

1 tetraederet har alle sidekanter længde $\frac{2}{3}\sqrt{2}$.

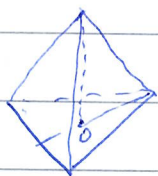
Arealet til en trekantet side flate er

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot h \quad \text{der } h \text{ er højden i trekanten.}$$

$$\text{Av pythagoras: } h^2 = (\frac{2}{3}\sqrt{2})^2 - (\frac{1}{3}\sqrt{2})^2 = (\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{2})^2 = (\frac{1}{3}\sqrt{6})^2$$

$$\text{så } \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{2} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{2}{9}\sqrt{3}$$

Højden i tetraeder er av Pythagoras



$$H^2 = (\frac{2}{3}\sqrt{2})^2 - (\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{6})^2 = \frac{8}{9} - \frac{4 \cdot 6}{81} = \frac{24-8}{27} = \frac{16}{27}$$

$$H = \frac{4}{3\sqrt{3}}$$

Så volumet av tetraederet er

$$\frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{9}\sqrt{3}) \cdot \frac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{81} \quad (= \frac{1}{6} \cdot \det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix})$$

5

a) $L_6 \sim$ linje gjennom $(0:-1:1)$ og $(1:-6:0)$,
så den har likning

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -6 & 0 \end{pmatrix} = 6x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

Alle disse går gjennom $(0:-1:1)$, men det går også
linje med likning $x_0 = 0$.

Det $\sim$ linje gjennom $(0:-1:1)$ og $(0:1:0)$
som $(0:1:0)$ $\sim$ punktet på linje $x_2 = 0$
som $\sim \lim_{b \rightarrow \infty} (1:-b:0)$.

b) $C_a: x_0^2 + ax_1^2 + 2ax_1x_2 - 3x_2^2 = 0$

når $a = -1$ så $\sim C_a: (x_0 \ x_1 \ x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

der $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ så $C_{-1} \sim$ ikke degenerert.

når $x_0 = 0$ så er $C_{-1}: -x_1^2 - 2x_1x_2 - 3x_2^2 = 0$

så $x_1 = (-1 \pm \sqrt{1-3})x_2$

Si C_{-1} har ingen reelle punkt på $x_0 = 0$.

Da $\sim C_{-1}$ en ellipse i planet der $x_0 \neq 0$.

c) I $x_2 \neq 0$ er C_a gitt ved likningen,
 $x_0^2 + 2ax_1 + ax_1^2 = 3$,

$$x_0^2 + a(x_1+1)^2 = 3+a$$

Dette $\sim$ en ellipse eller hyperbel med sentrum i $(0,-1)$.

Når $a > 0$ er det en ellipse og alle linjer gjennom $(0,-1)$
sår har felles punkt med ellipse C_a .

x.

Når $a < 0$ så er C_a en hyperbel med sentrum i $(0, -1)$, da vil alle linjer gjennom $(0, -1)$ ha felles punkt med C_a , med ett unntak:

når $a = -3$ har C_a likning

$x_0^2 - 3(x_1 + 1)^2 = 0$ i det affine planet for $x_2 \neq 0$. Dette er to linjer gjennom $(0, -1)$, så igjen vil alle linjer gjennom punktet ha felles linjer med C_{-3} .

~~Så ser vi på $a \geq 0$.~~

Når $a = 0$ har C_a likning $x_0^2 - 3x_2^2 = 0$, som er to linjer, som har felles punkt med alle andre linjer.

Så ser vi på $\bar{S}C$ er: $a = -3$ og $a \geq 0$.