

Mandag 31. august

Aksiomatisk plangeometri: Fåtte egenskaper ved euklidisk geometri bestemmer geometrien entydig².

Noen grunnleggende størrelser/begreper:

Punkt, linje, insidens, mellomhet.

- Aksiommer:
- To punkter bestemmer en linje
 - Det finnes tre punkter som ikke ligger på en linje
 - Kun ett av tre punkter på en linje ligger mellom de to andre

Utvider med nye begreper:

Kongruens av linjer og kongruens av vinkler

- Aksiommer:
- Lengder finnes overalt.

$\overline{AB}$ linjestykke og $A \in l$ er punkt
Der $\exists B' \in l$ slik at $\overline{AB} \cong \overline{AB'}$

- Kongruens er en ekvivalensrelasjon
- Vinkler finnes overalt
- Kongruens av vinkler er en ekvivalensrelasjon

Isometri: $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, bevarer avstand

$$d(m(\bar{x}), m(\bar{y})) = d(\bar{x}, \bar{y}) = \|\bar{y} - \bar{x}\|$$

Eks Translasjon: $m(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}$

$$d(m(\bar{x}), m(\bar{y})) = d(\bar{x} + \bar{a}, \bar{y} + \bar{a})$$

$$= \|\bar{y} + \bar{a} - (\bar{x} + \bar{a})\| = \|\bar{y} - \bar{x}\| = d(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\therefore \|m(\bar{x})\| = \|\bar{x}\|$$

$$\begin{aligned} - \|m(\bar{y}) - m(\bar{x})\|^2 &= \|m(\bar{y})\|^2 - 2m(\bar{y}) \cdot m(\bar{x}) + \|m(\bar{x})\|^2 \\ \| \bar{y} - \bar{x} \|^2 &= \|\bar{y}\|^2 - 2\bar{y} \cdot \bar{x} + \|\bar{x}\|^2 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} m(\bar{y}) \cdot m(\bar{x}) = \bar{y} \cdot \bar{x}$$

Bevise vinkler

Orthogonal matrise

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad a^2 + b^2 = 1 \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Kan skrive} \\ a = \cos \theta, b = \sin \theta \end{array}$$

eller

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Rotation sat} \\ \text{sammen med} \\ \text{refleksion} \end{array} \right.$$

$$\chi(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ b & -a-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - a^2 - b^2 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

$$\underline{\lambda = 1} \quad \begin{pmatrix} a-1 & b \\ b & -a-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a-1)x + by \\ bx - (a+1)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(-\frac{(a-1)(a+1)}{b} = \frac{1-a^2}{b} = b \right)$$

Linje: $(a-1)x + by = 0$
refleksion om denne linje.

Merk $\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = a^2 + b^2 = 1$ orienteringsbevarende

$\det \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} = -a^2 - b^2 = -1$ — reverserende

$\Rightarrow$ Sammensætning av to refleksjoner gir rotation
 $\underline{(-1) \cdot (-1) = 1.}$

Presis definisjon av kongruens:

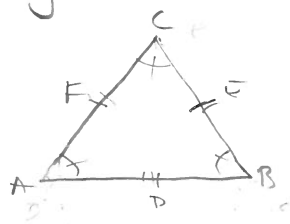
Defn 2.10 $\mathcal{F}, G$ Kongruente.

To figurer i $\mathbb{R}^2$

$\Downarrow$
 $\exists m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ isometri
slik at $G = m(\mathcal{F})$

Kongruens: Translasjoner, Rotasjoner, Refleksjoner

Eksempel: Symmetrier av likesidet trekant



identitet: id

rotasjon 120° : S $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

— " 240° : $S^2 = S^{-1}$ $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$

refleksjon om CD : μ $A \rightarrow B \rightarrow A$

— " — AE : μS $B \rightarrow C \rightarrow B$

— " — BF : μS^2 $A \rightarrow C \rightarrow A$

Merke $\mu S^2 = S\mu$

Mengden $\{id, S, S^2, \mu, \mu S, \mu S^2\}$ kalles en gruppe

Navn: D_3 : Dihedrale gruppa

$$D_3 = \langle S, \mu \mid S^3 = \mu^2 = id, \mu S^2 = S\mu \rangle$$

generatore relasjoner

Isometrier er isomorfier (1-1 og på)

Fordi: 1) hvis $m(\bar{x}) = m(\bar{y})$, $\bar{x} \neq \bar{y}$ så ville

$$d(m(\bar{x}), m(\bar{y})) = 0$$

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \neq 0$$

2) Anta $\bar{z} \in \mathbb{R}^2$ slik at $\bar{z} \neq m(\bar{x}) \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^2$

Velg tre punkter $m(\bar{x}_1), m(\bar{x}_2), m(\bar{x}_3)$ som sentrum i tre sirkler som møtes i et punkt. La $\bar{x}$ være tilsvarende punkt (uten m). Da vil $m(\bar{x}) = \bar{z}$.