

Torsdag 3. september

Isometrier i planet: $m: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $d(\bar{x}, \bar{y}) = d(m\bar{x}, m\bar{y})$
 $\bar{x} \cdot \bar{y} = m(\bar{x}) \cdot m(\bar{y})$

Tre typer (+ sammensetninger)

Translasjoner $t_{\bar{a}}(\bar{x}) = \bar{x} + \bar{a}$
 lineære operatore $\bar{v} \mapsto \bar{w}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Rotasjoner } R_{\theta} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \\ \text{Refleksjoner } \mu(\bar{x}) = A\bar{x} \quad \det A = -1 \end{array} \right.$

Refleksjoner

 Householder-matrise
 $Q_{\bar{v}} = Id - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T}{\bar{v}^T \bar{v}}$

$$Q_{\bar{v}}(\bar{v}) = Id(\bar{v}) - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T \bar{v}}{\bar{v}^T \bar{v}} = \bar{v} - 2\bar{v} = -\bar{v}$$

$$\bar{w} \cdot \bar{v} = 0 \quad Q_{\bar{v}}(\bar{w}) = Id(\bar{w}) - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T \bar{w}}{\bar{v}^T \bar{v}} = \bar{w} - 0 = \bar{w}$$

For 2×2 -matrise A

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)I = 0 \quad \text{tr} \left(\left(Id - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T}{\bar{v}^T \bar{v}} \right) \left(Id - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T}{\bar{v}^T \bar{v}} \right) - \left(Id - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T}{\bar{v}^T \bar{v}} \right)^2 \right)$$

$$\Downarrow$$

$$\det(A)I = \text{tr}(A)A - A^2 \quad = (2 - 2) \left(Id - 2 \frac{\bar{v} \bar{v}^T}{\bar{v}^T \bar{v}} \right) - Id = -Id$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\det = -1}}$$

Glide-refleksjon $t_{\bar{a}} \circ \mu$ $\bar{a}$ langs refleksjonsakse
 (trenger ikke $\det$)

Eksempel: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ 1-y \end{pmatrix}$

Speling om $y = \frac{1}{2}$, deretter
 translasjon $t_{(2,0)}$



Speiling om $y = \frac{1}{2}$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix}$

translasja $t_{(2,0)}$: $\begin{pmatrix} x \\ 1-y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+2 \\ 1-y \end{pmatrix}$.

Endelige undergrupper av Isometria av planet

Rotasjoner: Syklisk $C_n = \langle S_{\frac{2\pi}{n}} \rangle$ $S_{\frac{2\pi}{n}}^n = \text{id}$.

Refleksjoner: $\mu^2 = \text{id}$

Dihedrale gruppe $D_n = \langle S_{\frac{2\pi}{n}}, \mu \mid S_{\frac{2\pi}{n}}^n = \mu^2 = \text{id}, S\mu = \mu S^{-1} \rangle$

Vi er interessert i translasjonsgrupper på form

$$L = \{ t_{m\vec{a} + n\vec{b}} \mid m, n \in \mathbb{Z} \}$$

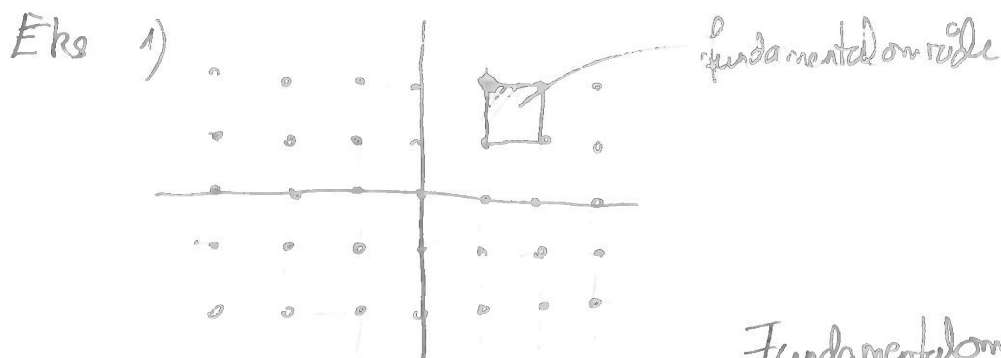
Kalles et gitter av rang 2

Et fundamentalområde for en gruppe G av isometria i planet er en lukket mengde $D \subseteq \mathbb{R}^2$

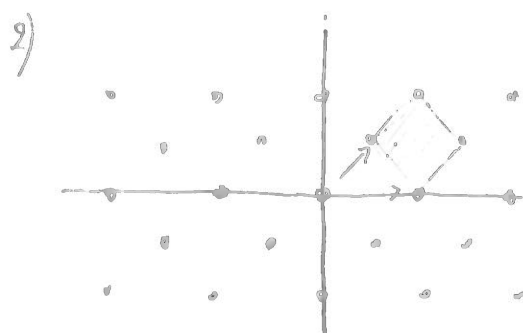
- randa er stykkevis glatt

- $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{g \in G} g(D)$

- Det indre av $g(D) \cap h(D)$ er $\emptyset$
 når $g \neq h$.



Fundamentalområdet
bestemmer translationsplane



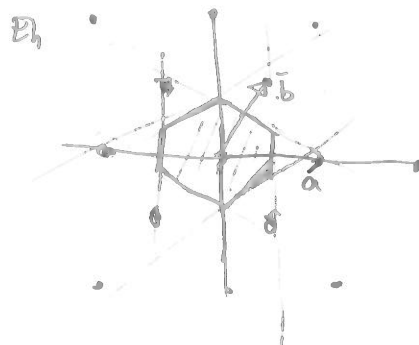
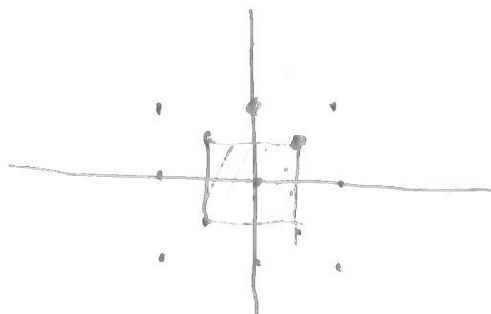
$$L_G = \{ t\bar{a} + n\bar{b} \}$$

$$M_G = \{ \bar{a}m + \bar{b}n \}$$

Dirichletområde til G

$$D_G = \{ p \in \mathbb{R}^2 \mid d(p, \bar{0}) \leq d(p, q) \forall q \in M_G, q \neq \bar{0} \}$$

Er



Punktgrupper

$$t_{\bar{a}} T \mapsto T$$

består af

- rotationsplaner / refleksplaner

- for D_G på sig selv.

Vi leder efter symmetri
til - begrænsede figure
tapetmønstre

