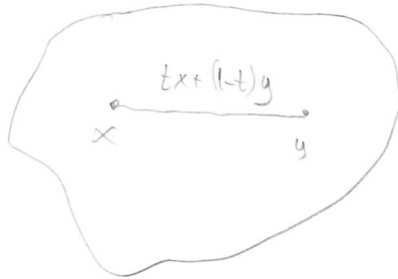


Torsdag 24. september

Ranggeometri

Konveks mengde: $K \subseteq \mathbb{R}^n$ er konveks dersom for alle $x, y \in K$, så er $\{tx + (1-t)y \mid 0 \leq t \leq 1\}$



Konveks innhylling av $M \subseteq \mathbb{R}^n$: Minste konvekse mengde som inneholder M

$M = \{x_1, \dots, x_r\}$ endelig
Innhylling av M: $\{t_1 x_1 + \dots + t_r x_r \mid \sum t_i = 1, t_i \geq 0\}$



Konveks innhylling

$$t_1 P + t_2 Q + t_3 R,$$

$$t_1 + t_2 + t_3 = 1$$

$$t_1, t_2, t_3 \geq 0$$



Ikke konvekse

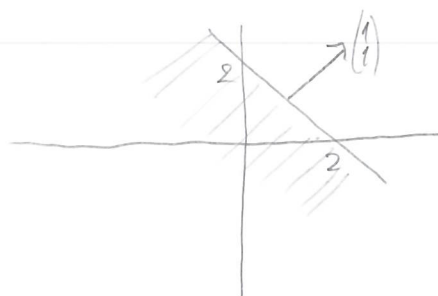
Konvekt polygon: Innhylling av endelig mange punkter i $\mathbb{R}^2$

Konvekt polyeder: Tilsvarende i $\mathbb{R}^3$ ($\mathbb{R}^n$)

Alternativ definisjon: Snitt av endelig mange halvplan

$$\exists \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r \in \mathbb{R}^3 \quad P = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \bar{a}_i \leq d_i \quad \forall i = 1, \dots, r\}$$

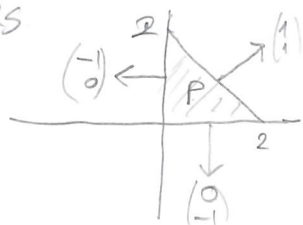
$$\exists d_1, \dots, d_r \in \mathbb{R}$$



$$\bar{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = 2$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad x \cdot \bar{a} = x + y \leq 2$$

Eks



$$P = \{(x,y) \mid (x,y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 2, (x,y) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \leq 0, (x,y) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \leq 0\}$$

$$\{(x,y) \mid x,y \geq 0, x+y \leq 2\}$$

Vi er mest interesseret i begrænsede polyedre, ikke



Merk: Noen $\bar{x} \cdot \bar{a}_i \leq d_i$ kan være overflødige

$$\bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 3 \quad \bar{x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \leq 2$$

overflødig

Polyeder: $\bar{x} \cdot \bar{a}_i \leq d_i$ definerer sideflater (sidekanter)

Sideflater møtes i kanter

endepunkter på kanten kalles hjørner



6 sideflater

5 hjørner

9 kanter

Schlegeldiagram: Projektion av polyeder ned i planet



Tetraeder



Kube (ternings)



Dobbelt tetraeder



Eulers formel: V antall hjørner
 e antall kante
 f antall sideflate

P : begrenset konvekt polyeder i $\mathbb{R}^3$

$$V - e + f = 2.$$

Tetraeder: $v=4, e=6, f=4 \quad v-e+f=2$

Kube: $v=8, e=12, f=6 \quad v-e+f=2$

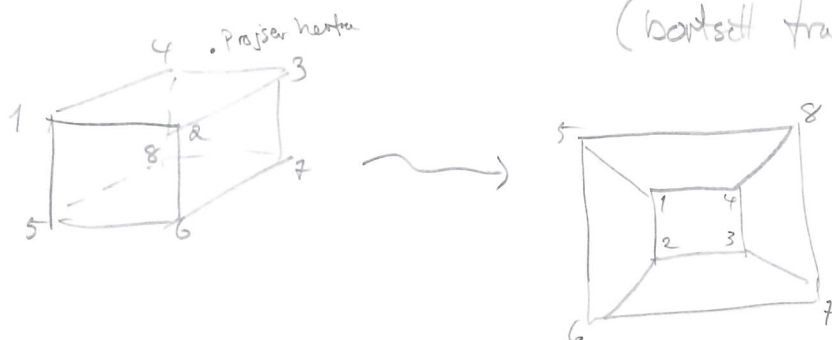
Dobbelt tetraeder: $v=5, e=9, f=6 \quad v-e+f=2$

Bevis: Schlegeldiagrammet er en sammenhengende graf

Noder i grafen = Hjørner i polyederet

Kanter i grafen = Kanter i polyederet

Flater svarer til avgrensede områder i grafen.
 (bortsett fra én; undersiden)



Induksjon på e :

Minste: $e=4$ Tetraeder, formel ok.

Anta sann for e og se på et schlegeldiagram med $e+1$ kanter. Vi fjerner én kant



Betyr at $V_{\text{for}} = V_{\text{etter}}$

$$e_{\text{for}} = e_{\text{etter}} + 1$$

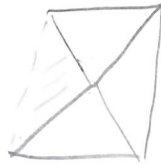
$$f_{\text{for}} = f_{\text{etter}} + 1$$

$$\begin{aligned} V_{\text{for}} - e_{\text{for}} + f_{\text{for}} &= V_{\text{etter}} - e_{\text{etter}} - 1 + f_{\text{etter}} + 1 \\ &= V_{\text{etter}} - e_{\text{etter}} + f_{\text{etter}} = 2. \end{aligned}$$

Alternativt:

1. starter med n -kant: $v - e + f = n - n + 1 = 1$ 2. a) fester en m -kant til en kant:

$$v - e + f = (n - n + 1) + (m - m + 1) - 1 = 1.$$

b) fester en m -kant til flere kanter (k kanter)

$$\begin{aligned} v - e + f &= 1 + (m - (k + 1)) - (m - k) + 1 \\ &= 1 + m - k - 1 - m + k + 1 = 1 \end{aligned}$$

3. Til slutt tetter vi "boksen", dvs ingen nye hjørner, ingen nye kanter, 1 ny sideflate

$$\Rightarrow v - e + f = 2.$$

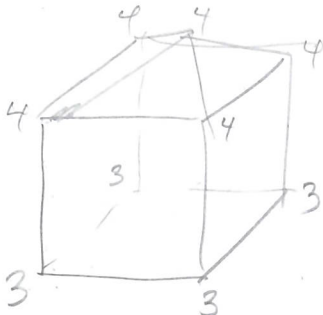
Eks:

Hjørner: $v = 16$ Kanter: $e = 32$ Flater: $f = 16$

$$v - e + f = 16 - 32 + 16 = \underline{\underline{0}}$$

Uthult Kube

Noen flere begreper:

Antall kanter som møtes i et hjørne P : $\deg P$ Antall kanter til en sideflate S : $\deg S$ 5 sideflater med $\deg = 4$ 4 ——— 1 ——— $\deg = 3$

$$4 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 32 = 2 \cdot 16$$

$$5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 = 32 = 2 \cdot 16$$

Hver kant har to ender $2e = \sum_{\substack{P \\ \text{hjørne}}} \deg P$

Hver kant sitter på to sideflater

$$2e = \sum_{\substack{S \\ \text{flate}}} \deg S$$

Eksempel 3.8. H19-oppg. 5

$P \subseteq \mathbb{R}^3$ $v=12, e=24$ Hva blir f ?
 konvexst
 polyeder

Polyedre består av 3-kanter og 4-kanter.
 Hvor mange av hver?

$$f = 2 - v + e = 2 - 12 + 24 = \underline{\underline{14}}$$

f_3 : antall 3-kanter f_4 : antall 4-kanter

$$f_3 + f_4 = 14 \quad | \cdot 3$$

$$3f_3 + 4f_4 = 2e = 48$$

$$3f_3 - 3f_3 + 4f_4 - 3f_4 = 48 - 3 \cdot 14 = 48 - 42$$

$$\underline{\underline{f_4 = 6 \Rightarrow f_3 = 8}}$$

Hvis regulært: alle hjørner er like $d = \deg P$

$$12 \cdot d = 2 \cdot 24 = 48 \Rightarrow d = 4$$

La d_3 : antall trekanter og d_4 : antall firkanter som møtes
 $d_3 + d_4 = 4$.

$$\frac{12 \cdot d_3}{3} = 8 \quad \frac{12 \cdot d_4}{4} = 6 \Rightarrow d_3 = d_4 = 2.$$

