

Gauss-Bonnets setning



Johann Carl Friedrich Gauss
(1777-1855)

Tysk matematiker og vitenskapsmann,
kjent som Princeps mathematicorum.

Kanskje historiens mest
innflytelsesrike matematiker



Pierre Ossian Bonnet
(1819-1892)

Fransk matematiker, mest kjent for
denne setningen som bærer hans navn,
sammen med den store Gauss.

Gauss-Bonnets setning handler om krumningen til en kompakt flate i $\mathbb{R}^3$.

Setning. *La S være en kompakt flate. Da er integralet av Gauss-krumningen κ over hele flaten pluss den geodesiske krumningen k_g langs randa til flaten lik 2π ganger Eulerkarakteristikken $\chi(S)$ til flaten;*

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi\chi(S)$$

Dersom S er en lukket flate vil det andre leddet falle bort siden lukkede flater ikke har rand. For en lukket kurve i planet har vi en analogi til setningen.

Setning. *La $C \subset \mathbb{A}^2$ være en lukket plan kurve som ikke skjærer seg selv. Da er integralet av krumningen κ (regnet med fortegn) over kurven lik 2π .*

$$\oint_C \kappa ds = 2\pi$$

Krumningen i et punkt på en glatt kurve er gitt ved 1 delt med radius i den sirkelen som best approksimerer kurven i punktet, den såkalte **oskulasjonssirkelen**. **Totalkrumningen** til kurven er gitt ved integralet av krumningen i alle punkter.

Eksempel. *La C være en sirkel med radius R . Da har vi konstant krumning $\kappa = \frac{1}{R}$, omkrets $2\pi R$, og totalkrumning 2π .*

Vinkelsummen i en plan trekant er 180 grader eller π og for en firkant er den 2π .

Setning. *For en mangekant med vinkler $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ har vi*

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = (m-2)\pi$$

Bevis. Velg ut ett hjørne og trekk linjer til alle andre hjørner. Mangekanten dekkes av $m - 2$ trekanter og vinkelsummen er lik summen av vinkelsummen i disse trekantene. $\square$

Den ytre vinkelen i et hjørne v i en mangekant er gitt som nabovinkelen til (den indre) vinkelen

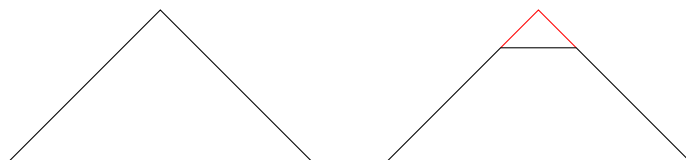
$$\alpha^* = \pi - \alpha(v)$$

Summen av de ytre vinklene i en mangekant er 2π . La hjørnene være $v_1, \dots, v_m$. Da har vi

$$\sum_{i=1}^m \alpha^*(v_i) = \sum_{i=1}^m (\pi - \alpha(v_i)) = \sum_{i=1}^m \pi - \sum_{i=1}^m \alpha(v_i) = m\pi - (m-2)\pi = 2\pi$$

Setning. Den ytre vinkelsummen er lik 2π for alle mangekanter.

Siden den ytre vinkelsummen i en mangekant er uavhengig av antallet kanter, vil den ikke endres dersom vi kutter av et hjørne i mangekanten:



Dette samsvarer med at krumningen i en sirkel også er 2π : Ved å kutte hjørner (uendelig) mange ganger vil vi i grensen ha glattet ut hjørnene i mangekanten og erstattet dem med sirkelbuer B med radius R_k og vinkel α_k , tilsvarende den ytre vinkelen i mangekant-hjørnet. Det gir krumning $\frac{1}{R_k}$ og buelengde $R_k \alpha_k$. Integralet av krumningen svarende til ett hjørne blir da

$$\int_B \kappa ds = R_k \alpha_k \cdot \frac{1}{R_k} = \alpha_k$$

Denne analogien til Gauss-Bonnets setning gjelder for en vilkårlig lukket kurve som ikke skjærer seg selv:

Bevis. (For plan Gauss-Bonnet) La kurven C være gitt ved parameterframstillingen $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbf{A}^2$. Vi betrakter tre størrelser:

- $\alpha(t)$: Vinkelen med x -aksen i $\gamma(t)$
- $\mathbf{T}(t)$: Tangentvektoren i punktet $\gamma(t)$
- $\mathbf{N}(t)$: Normalvektoren i punktet $\gamma(t)$

Vi har $\mathbf{T}(s) = (\cos \alpha(s), \sin \alpha(s))$ og $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \alpha'(s)(-\sin \alpha(s), \cos \alpha(s)) = \alpha'(s)\mathbf{N}(s)$. Samtidig har vi $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa(s)\mathbf{N}(s)$ og derfor $\kappa(s) = \alpha'(s)$. Det betyr at $\oint_C \kappa ds = \alpha(1) - \alpha(0) = 2\pi - 0 = 2\pi$. $\square$

Ytre vinkler i hjørner og krumning i glatte områder er av samme natur. For en lukket, konveks kurve i planet kan de summeres opp og vil til sammen gi 2π .

For kurver i $\mathbb{R}^3$ er situasjonen litt mer kompleks.

Werner Fenchel viste i 1929 følgende resultat:

Setning. *Totalkrumningen til en lukket romkurve er større enn eller lik 2π , med likhet dersom kurven er plan og konveks.*



Spesielt vil en plan sirkel i hvert punkt approksimeres best av seg selv, krumningen i alle punkter der derfor $\frac{1}{r}$, og totalkrumningen er lik krumning ganger omkrets, dvs. $\frac{1}{r} \cdot 2\pi r = 2\pi$, som bekrefter Fenchels resultat i det tilfellet.

For flater i rommet er situasjonen enda vanskeligere, spesielt er begrepet romvinkel problematisk. Det er ikke opplagt hva romvinkelen til en kjegle (rund eller kantet) skal være.

For en plan vinkel kan vi definere en funksjon $\phi : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\phi(v) = \begin{cases} 0 & \{0 + \lambda v\} \cap C = \emptyset \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor C er en lukket kurve som ikke skjærer seg selv og som omslutter, men ikke inneholder origo. λ er et positivt reelt tall. Den indre vinkelen er gitt ved

$$\alpha(C) = \int_{S^1} \phi \, ds$$

Den umiddelbare generaliseringen til en rom vinkel ville være å definere en funksjon $\phi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ved

$$\phi(v) = \begin{cases} 0 & \{0 + \lambda v\} \cap S = \emptyset \\ 1 & \text{ellers} \end{cases}$$

hvor S er en flate som ikke skjærer seg selv og som omslutter, men ikke inneholder origo. Den indre vinkelen er gitt ved

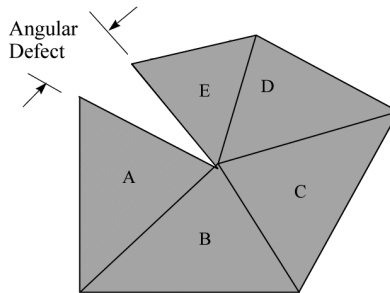
$$\beta = \int_{S^2} \phi \, da$$

Dette viser seg å ikke fungere tilfredsstillende, så vi må gjøre det på en annen måte.

Definisjon. I et hjørne v i et polyeder hvor n flater møtes definerer vi **vinkeldefekten** ved

$$v^* = 2\pi - \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

der $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ er hjørnevinklene til de n flatene.



Vinkeldefekten måler hvor langt et hjørne i polyederet er fra å være flatt. Et flatt hjørne har vinkeldefekt 0.

Definisjon. Vinkeldefekten $D = D(V)$ til et polyeder V er summen av vinkeldefekten til hjørnene i polyederet, $D = \sum v^*$

Eksempel. Vinkeldefekten i et hjørne i tetraedet er gitt ved $2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{3} = \pi$, mens vinkeldefekten i et hjørne i en kube er gitt ved $2\pi - 3 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$. Tetraederet har 4 hjørner, total defekt, 4π , mens kuben har 8 hjørner, total defekt er igjen 4π .

Descartes setning gir en analogi til setningen om summen av de ytre vinklene i en mangekant.

Setning. (Descartes) Vinkeldefekten til et polyeder er lik 4π .

Bevis. Anta at polyederet har v hjørner, e kanter og f flater. Vinkeldefekten er gitt ved $v \cdot 2\pi - \sum \alpha_{ij}$, hvor vi summerer over alle hjørnene og alle flatene som møtes i hvert hjørne. Antall ledd i summen er $2e$. Det gir

$$\begin{aligned} D &= v \cdot 2\pi - \sum \alpha_{ij} \\ &= v \cdot 2\pi - \sum (\pi - \alpha_{ij}^*) \\ &= v \cdot 2\pi - \sum \pi + \sum \alpha_{ij}^* \\ &= v \cdot 2\pi - 2e \cdot \pi + f \cdot 2\pi \\ &= \chi(V) \cdot 2\pi = 4\pi \end{aligned}$$

□

Det betyr at vi på samme måte som i det plane tilfellet kan skjære bort et hjørne uten at den totale vinkeldefekten endrer seg. Vi kan også tenke oss at vi kan gjøre dette uendelig mange ganger og på den måten glatte ut polyederet. De endelig mange hjørnedefektene vil da i grensen fordele seg jevnt som en kontinuerlig krumning ut over hele overflaten til legemet.

Vi ender opp med samme konklusjon som i det plane tilfellet: Vinkeldefekt i hjørner og krumning i glatte områder er av samme natur. For et lukket, konveks legeme i rommet kan de summeres opp og vil til sammen gi 4π .

Vi startet med Gauss-Bonnets setning, og vi ender opp med samme setning

Setning. (Gauss-Bonnet (1848)) La S være en kompakt flate. Da er integralet av Gauss-krumningen κ over hele flaten pluss den geodesiske krumningen langs randa til flaten lik 2 ganger Eulerkarakteristikken $\chi(S)$ til flaten;

$$\iint_S \kappa dS + \int_{\partial S} k_g ds = 2\pi\chi(S)$$

Teoremet ble første gang formulert og bevist i sin fulle generalitet av Bonnet i 1848.

Begrepene i setningen trenger en nærmere beskrivelse: **Gauss-krumningen** i et punkt på en flate er produktet av hovedkrumningene, dvs. største og minste krumning, målt i alle retninger i punktet. **Geodesisk krumning** til en kurve måler hvor langt kurven er fra å være geodesisk, dvs. en korteste-vei-kurve mellom to punkter på flaten. **Euler-karakteristikken** til en triangulert flate V er som tidligere nevnt gitt ved $\chi(V) = v - e + f$, der v er antall hjørner, e er antall kanter og f er antall flater.

Setningen har navn etter Gauss og Bonnet. Bonnet presenterte den endelige formen i 1848, men Gauss hadde tidligere presentert et litt mindre generelt resultat:

Setning. (Gauss (1828)) *La D være et område (lukket og begrenset) av en flate, avgrenset av geodesiske kurver. Da gjelder Gauss-Bonnet for D , dvs*

$$\iint_D \kappa dS = 2\pi - \sum_v (\pi - \alpha(v))$$

der v betegner hjørner med vinkel $\alpha(v)$.

Sammenhengen mellom denne formen og den mer generelle formen er at selv om den geodesiske krumningen er 0 langs en geodetisk kurve, vil den i skjæringspunktene mellom to geodetiske kurver være gitt ved den ytre vinkelen mellom tangentene til de to kurvene i skjæringspunktet. Euler-karakteristikken til en flate med rand som ikke skjærer seg selv er 1. Setter vi dette inn i Gauss-Bonnet fra 1848, får vi Gauss sitt resultat fra 1828.

Et enda tidligere resultat, presentert av Thomas Harriot i 1603 gir en versjon av setningen på en kuleflate:

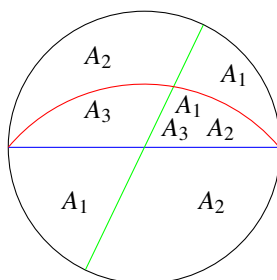
Setning. (Harriot (1603)) *La D være en geodesisk trekant på en kuleflate av radius R og vinkler α , β og γ . Da gjelder Gauss-Bonnet for D , dvs*

$$\frac{A}{R^2} = 2\pi - ((\pi - \alpha) + (\pi - \beta) + (\pi - \gamma)) = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

Harriots resultat kan enkelt visualiseres: En geodesisk kurve på en kuleflate er en del av en storsirkel. En geodesisk trekant er derfor avgrenset av tre storsirkler, som vi kan oppfatte som snittet av 3 geodesiske (appelsin-)båter. Arealet A av en geodesisk appelsinbåt er gitt ved $2R^2\alpha$, der α er baugvinkelen og R er radien til appelsinen. Arealet av båtene kaller vi A_α , A_β og A_γ . Summen av disse er

$$A_\alpha + A_\beta + A_\gamma = 2R^2(\alpha + \beta + \gamma)$$

Her er en illustrasjon av hvordan dette arter seg på den nordlige halvkule. Vi får akkurat tilsvarende på den sørlige.



To av hver båt dekker til sammen hele kula, med arealet A av trekanten $4 = 6 - 2$ ekstra ganger. Det gir

$$4\pi R^2 = 2(A_\alpha + A_\beta + A_\gamma) + 4A = 4R^2(\alpha + \beta + \gamma) + 4A$$

Det følger at $A = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

Archimedes har også en slags versjon av Gauss-Bonnet, fra ca. 250 f.Kr.

Setning. (Archimedes) La A betegne arealet av den delen av et kuleskall med radius R som er kuttet av ved et plan. La r betegne avstanden fra det sentrale punktet på kulekalotten og til et punkt på periferien. Da er $A = \pi r^2$.

La sentralvinkelen mellom senterpunktet og periferien være α . Da er

$$A = \pi r^2 = \pi((R - R \cos \alpha)^2 + (R \sin \alpha)^2) = 2\pi R^2(1 - \cos \alpha)$$

Videre kan vi beregne den geodesiske krumningen langs periferien til å være $k_g = \frac{\cos \alpha}{R \sin \alpha}$. Omkretsen av periferien er $L = 2\pi R \sin \alpha$ og krumningen av kuleskallet er konstant lik $\frac{1}{R^2}$. Arkimedes resultat sier dermed at

$$\frac{A}{R^2} = 2\pi - 2\pi \cos \alpha = 2\pi - k_g L$$

som er presis Gauss-Bonnet.