

## Plan for undervisningen i MAT2500, høsten 2026

Periode 1, geometri i det euklidske planet,  
17. august-10. september

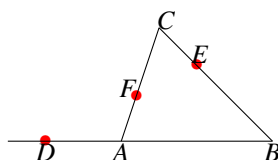
### Mandag 17. august

Vi starter med å gjøre et forsøk på å beskrive hva geometri er. Som et utgangspunkt skal vi bruke Hilberts aksiomer for plangeometri. Aksiomene definerer euklidsk geometri, som vi gjerne kunne kalt flat geometri. Men vi kan også studere geometriske objekter på andre, ikke-flate rom som f.eks. på en kuleflate. En annen mulig utvidelse av vårt geometribegrep er å inkludere uendelig fjerne punkter. Det vil gi oss noen fordeler, f.eks. at alle linjer skjærer hverandre, også to parallelle. Men på den annen side taper vi en del ting, blant annet er det vanskelig å definere en presis avstand mellom et vanlig punkt og et uendelig fjernt punkt.

For å gi et innblikk i hva vi skal gjennomgå i løpet av høsten skal vi kikke litt på et par eksamensoppgaver, uten å fokusere så mye på hvordan de løses.

Etter de innledende kommentarene starter vi med en del klassiske begreper og resultater knyttet til trekanter, slik som transversalteoremet, likeformethet, kongruens og delingsforhold. Et klassisk resultat som bygger på mye av dette er kjent som Menelaos teorem. En linje som skjærer alle de tre kantene (eller deres forlengelse i begge retninger) danner et spesielt forhold mellom de 6 avstandene til de tre hjørnene i trekanten. Her er et eksempel:

Vi har gitt en trekant  $\triangle ABC$  og punkter  $D$  på  $AB$ ,  $E$  på  $BC$  og  $F$  på  $AC$  som illustrert på figuren:



Lengdene av linjestykkene er som følger:  $DA = 2$ ,  $AB = 4$ ,  $BE = 2\sqrt{2}$ ,  $EC = \sqrt{2}$ ,  $CF = \sqrt{3.6}$ ,  $FA = \sqrt{1.6}$ . Menelaos setning sier at  $D$ ,  $E$  og  $F$  ligger på linje fordi forholdene mellom lengdene av de enkelte linjestykkene oppfyller

$$\frac{AD}{DB} \frac{BE}{EC} \frac{CF}{FA} = \frac{(-2)}{6} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3.6}}{\sqrt{1.6}} = \frac{(-2) \cdot 2 \cdot 6}{6 \cdot 1 \cdot 4} = -1$$

En annen morsom anvendelse er Toricelli-Fermats teorem, som påviser Fermat-punktet i en trekant. Fermat-punktet er det punktet i trekanten hvor summen av avstandene til de tre hjørnene er minimal.

### Tirsdag 18. august

Ingen øvelse idag.

### Torsdag 20. august

Selv om vi har en klar formening om hva en rett linje er (korteste vei mellom to punkter), er det ikke like enkelt å *konstruere* en rett linje. En måte å gjøre det er å

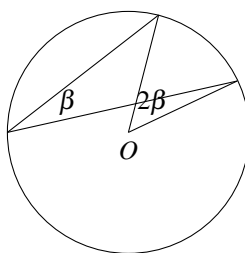
tenke på en rett linje som en sirkel med uendelig radius. Konstruksjonen benytter seg av *inversjon over en sirkel*. Vi skal se på hva dette innebærer og formulere et resultat om forholdet mellom lengdene på kantene i en trekant og de korresponderende lengdene til den inverterte trekanten.

En fransk ingeniør, Charles-Nicolas Peaucellier, konstruerte i 1864 en enkel innretning som på en elegant måte lar oss konstruere en sirkel med uendelig radius og dermed også en rett linje.

Etter dette lille mellomspillet går vi tilbake til Menelaos setning, og en nær slektning, kalt Cevas setning. I Cevas setning trekker vi linjer mellom hjørnene i trekantene og ser på skjæringspunktene mellom linjene og de motstående kantene. Disse linjene kalles Ceva-linjer. Vi regner ut et bestemt forhold mellom de 6 lengdene som Ceva-linjene deler kantene i. Dersom dette forholdet er 1 vil de tre Ceva-linjene møtes i ett punkt. Dette er Cevas setning.

### Mandag 24. august

I dag fortsetter vi med å studere klassiske setninger innen plangeometri. Et sentralt teorem vil være sentral-periferi-setningen. Den sier at i en sirkel er en sentralvinkel dobbelt så stor som en periferivinkel som spenner over samme sirkelbue. Spesielt er periferivinkler som spenner over samme sirkelbue like store.



Et spesialtilfelle av sentral-periferi-setningen er Thales setning, som sier at en vinkel som spenner over en diameter i en sirkel er  $\frac{\pi}{2}$ . En annen konsekvens er at summen av de motstående vinklene i en sirkulær firkant er  $\pi$ . En sirkulær firkant  $ABCD$  er en firkant der alle hjørnene ligger på en sirkel. Ptolemais teorem beskriver en relasjon mellom lengden av kantene i en slik firkant:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$$

Som en siste konsekvens av Menelaos setning skal vi vise Pappos setning. Med utgangspunkt i to rette linjer og tre punkter på hver av dem, trekker vi 6 linjer med tre skjæringspunkter. Pappos sier at disse tre ligger på linje.

Dagens forelesning avsluttes med definisjonen av et punkts potens på en sirkel og den nødvendige presiseringen at definisjonen er uavhengig av valg av linje gjennom punktet (og som treffer sirkelen).

### Tirsdag 25. august

Vi gjennomgår Eksempel 4.11 i Kompendiet. Deretter ser vi på Setning 4.8 om halveringslinjer, med bevis. Denne setningen skal vi anvende på oppgave 3 i kapittel 4. På veien gjør vi også oppgave 2 som generaliserer Menelaos setning til en firkant. Vi kan med fordel jobbe med oppgavene i smågrupper på 2-3 studenter.

### **Torsdag 27. august**

Vi plukker opp tråden fra mandag om punkters potens på en sirkel og viser Pascals setning. Pascals setning er nært beslektet med Pappos setning, forskjellen er at de 6 punktene nå ligger på en sirkel. Sammenhengen er at en sirkel og to linjer begge er beskrevet av en kvadratisk likning.

Resten av forelesningen i dag bruker vi på konstruksjoner med passer og linjal. Konstruksjon med passer og linjal innebærer at vi med utgangspunkt i ett eller flere punkter i planet kan konstruere sirkler om punktene, dvs. *det geometriske stedet* for alle punkter i en fast avstand til et gitt punkt. Bruk av linjal betyr at dersom vi har gitt to punkter, så kan vi trekke en rett linje gjennom punktene. To (ikke parallelle) linjer vil i sin tur definere et nytt punkt.

Et eksempel på denne type konstruksjoner er radikalaksen, dvs. mengden av punkter som har samme potens med hensyn på to gitte sirkler. Denne aksen er konstruerbar med passer og linjal.

### **Mandag 31. august**

Blant Hilberts aksiomer for plangeometri finner vi flere kongruensaksiomer. Disse aksiomene identifiserer like figurer, uansett hvor i planet de måtte befinne seg og uavhengig av om de er rotert eller speilvendt. Kongruenser er nært knyttet til isometrier. Isometrier er avbildninger i planet (eller rommet) som bevarer alle avstander, derfor ofte omtalt som stive bevegelser. Det er 3 hovedtyper av isometrier i planet, translasjoner, rotasjoner og refleksjoner. De to siste typene kan uttrykkes ved matrisemultiplikasjon med ortogonale matriser. Mengden av isometrier har en naturlig gruppestruktur som skal hjelpe oss i klassifikasjon av geometriske objekter.

### **Tirsdag 1. september**

Ta med passer og linjal i dag. Vi skal konstruere 3-, 5- og 6-deling av sirkelen, tangent til sirkel fra et punkt på og utenfor sirkelen, og konstruere en sirkel gjennom tre ikke-kolineære punkter. Beskrivelse av konstruksjonene kan du finne i eget lite hefte. En interessant variant er konstruksjonen av en tangent til en ellipse gjennom et punkt på ellipsen. Dette er en smart anvendelse av Pascals setning (på en ellipse, samme resultat som på en sirkel).

### **Torsdag 3. september**

I dag fortsetter vi med å studere isometrier i planet. For et gitt geometrisk objekt kan vi studere isometrier som fikserer (eller bevarer) objektet. Slike isometrier kalles **symmetrier** av det geometriske objektet. Vi skal studere symmetriene til flere kjente objekter i planet, som trekanter, firkanter osv. Symmetriene til et objekt danner en undergruppe av isometri-gruppa. Dermed kan vi etablere en sammenheng mellom undergrupper av isometri-gruppa og geometriske objekter via symmetri-gruppene.

### **Mandag 7. september**

I dag tar vi for oss alt rundt isometrier i planet som vi ikke har rukket gjennom til nå.

### **Tirsdag 8. september**

Vi fokuserer på oppgaver fra kapittel 2: 2, 4, 9, 10 og 11. I tillegg skal vi skrive opp alle kommutasjonsreglene for rotasjoner, translasjoner og refleksjoner, lage bilder av

hva de innebærer og bevise reglene analytisk. Et eksempel på en kommutasjonsregel er rotasjon-translasjon, gitt ved

$$\rho_{\theta} T_{\mathbf{a}} = T_{\theta(\mathbf{a})} \rho_{\theta}$$

Fortsatt er det bra om vi jobber i smågrupper.

## Periode 2, analytisk plangeometri, 10. september-1. oktober

### Torsdag 10. september

I studiet av isometrier i planet har vi introdusert koordinatsystemer som et hjelpemiddel for å beskrive avbildninger. Koordinatsystemene kan også hjelpe oss til å beskrive de geometriske objektene, som nullpunktsmengden til algebraiske likninger. F.eks. kan vi definere en sirkel i planet som nullpunktsmengden til likningen  $x^2 + y^2 = 1$ . En annen formulering av dette er at en sirkel er **det geometriske stedet** for punkter med en fast avstand til et gitt punkt. Tilsvarende er en ellipse det geometriske stedet for punkter hvor summen av avstandene til to gitte punkter er konstant. Men ellipser kan også beskrives analytisk som nullpunktene til en kvadratisk likning.

Fellesbetegnelsen for sirkler, ellipser, hyperbler og parabler er kjeglesnitt. Bakgrunnen for ordet kjeglesnitt er at kjeglesnittene er akkurat det det høres ut som, snitt mellom kjegler og plan. Vi skal gjennom noen forelesninger studere kjeglesnitt, litt fra den geometriske siden, men mest via analytiske metoder.

### Mandag 14. september

Det geometriske stedet for et kjeglesnitt kan føres tilbake til Pappos og er gitt ved begrepene eksentrisitet, styrelinje og brennpunkt. Med litt regning gir dette oss direkte de analytiske formene, dvs. formlene for de ulike kjeglesnittene. I dag skal vi legge grunnlaget for videre studier av kjeglesnitt. Det blir mange definisjoner og begreper, og resultatene vil i hovedsak dreie seg om sammenheng mellom geometriske og analytiske beskrivelser.

### Tirsdag 15. september

I dag ser vi på flere oppgaver fra kapittel 2. Gode forslag er oppgave 14, 15, 18 og 25. I tillegg eksamensoppgavene E1 og E2. Smågrupper i dag også, men hva med å endre litt på sammensetningen?

### Torsdag 17. september

Vi skal regne ut hvordan tangenter til kjeglesnitt ser ut. Vi skal også definere hva vi mener med pol og polare for et generelt kjeglesnitt. Polen er et punkt og polaren er en linje og de har veldig karakteristiske egenskaper og samspill. Et eksempel er at et punkt  $P$  ligger på sin polare  $\ell(P)$  med hensyn til et kjeglesnitt hvis og bare hvis  $P$  ligger på kjeglesnittet og  $\ell(P)$  er tangentlinja til kjeglesnittet i  $P$ . Et annet resultat er La Hires setning som sier at hvis  $P$  ligger på polaren til  $Q$ , så ligger  $Q$  på polaren til  $P$ . Vi kan koble pol og polare for en sirkel til inversjon over sirkelen. For et punkt  $Q$  inne i sirkelen med sentrum  $O$  kan vi konstruere en sirkel med  $OQ$  som diameter. Inverteringen av denne sirkelen over den opprinnelige sirkelen er polaren til punktet  $Q$ .

**Mandag 21. september**

I en parabolantenne samles signaler som kommer parallelt inn i antennes brennpunkt. Dette er en konsekvens av speilingsegenskapene til et kjeglesnitt. Vi skal blant annet se at i en ellipse vil en stråle som sendes ut fra det ene brennpunktet reflekteres mot det andre, uavhengig av strålens retning. Tilsvarende egenskap har vi for en hyperbel. Dette er vel kanskje den egenskapen til kjeglesnittene som har flest praktiske anvendelser.

I forelesningen skal vi også se på flere andre egenskaper ved kjeglesnitt, noen har en viss praktisk interesse, mens andre har et mer teoretisk tilsnitt.

**Tirsdag 22. september**

Vi gjennomgår i fellesskap Eksempelene 5.31 og 5.32. Deretter jobber vi i smågrupper med oppgavene under kapittel 5; 3, 4 og 5. Dette dreier seg om å regne ut og å beskrive ulike geometriske steder.

**Torsdag 24. september**

I dag tar vi for oss alt rundt kjeglesnitt som vi ikke har rukket gjennom så langt.

Periode 3, geometri i  $\mathbb{R}^3$ ,  
28. september-8. oktober

**Mandag 28. september**

Vi skal i denne perioden forflytte oss fra plangeometri til romgeometri og studere romlige legemer. For ikke å bevege oss alt for langt ut på glattisen trenger vi å sette noen begrensninger. Første begrensning er at vi hovedsakelig studerer konvekse legemer. En annen begrensning vil være å fokusere på polyedere, og i noen tilfeller nøyer vi oss med regulære polyedere med stor grad av symmetri.

Vi starter med de formelle definisjonene og jobber oss videre derfra. Det er naturlig å starte litt enkelt med plane mangekanter, for å bli litt kjent med noen begreper. Men vi kommer raskt til romlige begreper som vinkeldefekt, valens og Schlegeldiagram, noe som leder oss til Eulers berømte formel.

$$F - E + V = 2$$

**Tirsdag 29. september**

Siden vi nå er ferdig med kjeglesnitt-perioden tar vi for oss noen eksamens-typiske oppgaver innenfor dette temaet. Vi ser på Eksempel 5.34 i fellesskap og deretter blir det tid til at man forsøker seg på noen eksamensoppgaver under kapittel 5.10.1, fe.eks. E1, E2 og E3. Dette gjøres i små grupper på 2-3 studenter.

**Torsdag 1. oktober**

Polyedere er det som vi kaller stykkvis lineære legemer. Det finnes selvfølgelig mange legemer hvor ikke overflaten er satt sammen av et endelig antall flatestykker, hvor overflaten kan ha krumning. Vi skal se litt (overfladisk) på hvordan vi kan koble teorien for polyedere sammen med resultater for krumning. Hovedresultatet her er det som heter

Gauss-Bonnet-teoremet. Dette teoremet ligger litt utenfor pensum i MAT2500, men vi skal likevel se litt på hva teoremet innebærer.

Det finnes selvfølgelig uendelig mange forskjellige konvekse legemer, men hvis vi begrenser oss til polyedere med større eller mindre grad av symmetri, er det faktisk mulig å klassifisere dem. Dette blir det mer av neste uke.

#### **Mandag 5. oktober**

For klassifikasjon av regulære eller semi-regulære konvekse legemer er vårt viktigste verktøy, i tillegg til ren telling av hjørner, kanter og flater, symmetrigruppene til legemene. Symmetriene til legemene er basert på isometrier i rommet, i vårt tilfelle rotasjoner, og hvordan de ulike rotasjonene forholder seg til hverandre. Et enkelt eksempel er rotasjonssymmetriene til regulære plane mangekanter. En  $n$ -kant har  $n$  rotasjonssymmetrier og disse rotasjonssymmetriene bestemmer i stor grad hvordan den plane mangekanten ser ut.

Tilsvarende vil det være for regulære polyedere. Mengden av og strukturen på legemets rotasjonssymmetrier gir oss mye informasjon om hvordan legemet kan se ut. Dette skal vi se nærmere på. Spesielt skal vi knytte dette opp mot de platonske og også de mer generelle arkimediske legemene.

#### **Tirsdag 6. oktober**

Regneøvelsen i dag dreier seg om å bygge regulære polyedere, satt sammen av egnede plastbrikker. Disse brikkene er kanskje kjent for noen som leketøy i barnehagen eller barneskolen, men de er godt egnet til å danne seg et bilde av regulære legemer.

#### **Torsdag 8. oktober**

Siste forelesningen i denne perioden blir som i de andre periodene, en gjennomgang av det vi ikke har rukket til nå.

## Periode 4, projektiv geometri, 12. oktober-5. november

#### **Mandag 12. oktober**

Euklidsk geometri har noen mangler når det kommer til projeksjoner, to parallelle linjer ser ut til å møtes i det uendelig fjerne, men vi har ikke noe formelt begrep som tar seg av dette. Projektiv geometri handler om å tette dette hullet. I tillegg til alle punktene i det euklidske planet introduserer vi punkter i det uendelig fjerne, ett for hver retning i planet. Parallelle linjer vil da møtes i dette punktet. Det vi taper ved denne konstruksjonen er at vi ikke klarer å opprettholde et universelt avstandsbegrep. Vi kan snakke om avstander mellom punkter i det euklidske planet, men det er betydelig vanskeligere å definere en avstand til et punkt i det uendelig fjerne.

En alternativ måte å beskrive det projektive planet er å starte med det euklidske rommet  $\mathbb{R}^3$  (unntatt origo) og la  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  virke ved komponentvis multiplikasjon. Det projektive planet kan betraktes som kvosienten av denne konstruksjonen, vi skriver punkter i det projektive planet som  $(x : y : z)$  hvor dette er ekvivalensklassen til  $(x, y, z)$  under ekvivalensrelasjonen  $(x, y, z) \sim (tx, ty, tz)$ .

Etter å ha definert punkter i det projektive planet, går vi videre og ser på hva vi mener med linjer, skjæringspunkter, etc. Spesielt skal vi se at det vi startet med stemmer, at alle linjer skjærer hverandre.

Vi avslutter dagens forelesning med å se på projektive varianter av Menelaos og Cevas setninger, og vi tar med Desargues setning i samme slengen.

### Tirsdag 13. oktober

I dag gjør vi oppgaver fra kapittel 3, gjerne oppgave 1, 2 og 4. I tillegg kan man danne små grupper på 2-3 studenter og i fellesskap gå gjennom eksemplene i kapittel 3.2 om platonske legemer.

### Torsdag 15. oktober

Hvis vi skal definere avbildninger mellom projektive plan er det naturlige kravet at avbildningene bevarer vesentlige egenskaper. I dette tilfellet betyr det at vi ser på lineære avbildninger i  $\mathbb{R}^3$  som respekterer den aktuelle ekvivalensrelasjonen. I  $\mathbb{R}^3$  vil to 3-punkts-mengder definere en lineæravbildning (noen premisser mht. lineær uavhengighet må være oppfylt). For en projektiv transformasjon trenger vi to 4-punkts-mengder for det samme formålet.

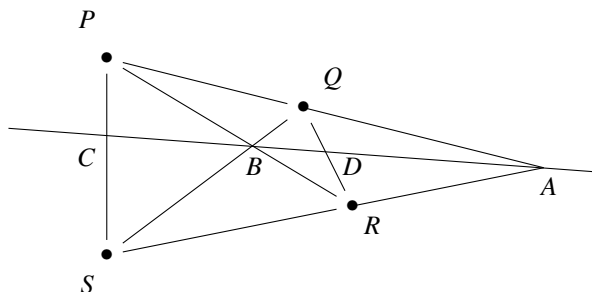
Projektive transformasjoner bevarer lineære geometriske konfigurasjoner. F.eks. vil tre punkter på linje fortsatt ligge på linje etter å ha gjennomgått en projektiv transformasjon. Det betyr at mange av resultatene i plangeometri ligger fast modulo projektive transformasjoner. Dette kan vi utnytte og i mange tilfeller kan vi føre mye enklere bevis for våre etablerte setninger. Vi skal spesielt se på Pappos og Desargues setninger.

### Mandag 19. oktober

Hvis vi har fire punkter  $A, B, C$  og  $D$  på en rett linje (i den ordningen), kan vi regne ut et forholdstall, kalt **kryssforholdet**. Kryssforholdet er definert ved

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}}$$

og vi sier at punktparene  $(A, B)$  og  $(C, D)$  er **harmonisk konjugert** dersom kryssforholdet er  $-1$ . Det er selvfølgelig ikke tilfeldig at det er  $-1$  som girt opphav til et eget begrep og vi har dette resultatet, altså  $(AB, CD) = -1$  dersom det finnes fire punkter  $P, Q, R$  og  $S$  som forholder seg til  $A, B, C$  og  $D$  som illustrert på figuren.



Kryssforholdet er konstant under ett-punkts-prosjeksjoner. Med det mener vi at dersom vi lar 4 linjer møtes i ett punkt og så lar de 4 linjene skjære en 5. linje, så vil kryssforholdet

mellom de 4 skjæringspunktene være uavhengig av valg av den 5. linja. Vi formulerer dette ved at perspektivet av 4 stråler fra et felles skjæringspunkt er konstant.

#### **Tirsdag 20. oktober**

Siden det nærmer seg innlevering av prosjektene setter vi av denne tirsdagen til å jobbe med prosjekt/oblig.

#### **Torsdag 22. oktober**

Som en generalisering av kjeglesnitt i det euklidske planet har vi kjeglesnitt i  $\mathbb{P}^2$ , gitt ved en kvadratisk form i 3 variable. Hvis vi ser bort fra de degenererte kjeglesnittene (en dobbel eller to enkle linjer) og snitter den kvadratiske formen med en linje, vil determinanten til resultatet avgjøre typen av kjeglesnitt. Gjennom ortonormale basisskifter kan en linje transformeres til en vilkårlig annen linje. Vi skal bruke dette til å vise at det i det projektive planet kun finnes ett ikke-degenerert kjeglesnitt. Hvilken type kjeglesnitt avhenger kun av hva som settes til å være det uendelig fjerne, og typen bestemmes av antall skjæringspunkter mellom den kvadratiske formen og linja.

Dette er ikke noe rett fram resultat og vi kommer til å bruke hele forelesningen på å bevise dette.

#### **Mandag 26. oktober**

I denne forelesningen skal vi bruke sammenhengen mellom projektive og affine plan implisitt for å vise hvordan kjeglesnittene som vi har definert i det euklidske planet framkommer som snitt mellom affine plan og en kjegle, og for å gi et enkelt bevis av Pascals setning.

#### **Tirsdag 27. oktober**

Vi gjør Eksempel 6.6 og 6.24 i plenum og fortsetter med Eksempel 6.29 i smågrupper. Deretter kan alle prøve seg på egenhånd eller i smågrupper på E1, E2 og/eller E3 under avsnitt 6.6.1.

#### **Torsdag 29. oktober**

Denne forelesningen blir en slags buffer, avhengig av hvordan framdriften gjennom høsten har vært. Enten gjenstår det litt rundt projektiv geometri, eller så kan vi starte opp med prosjektpresentasjoner.

## **Periode 5, prosjektpresentasjoner, 2. november-5. november**

#### **Mandag 2. november**

Prosjektpresentasjoner

#### **Tirsdag 3. november**

Prosjektpresentasjoner

**Torsdag 5. november**

Prosjektpresentasjoner

Periode 6, eksamensforberedelser,  
9. november-26. november

**Mandag 9. - torsdag 26. november**

Vi regner (eksamens-)oppgaver. Detaljert plan blir lagt når tidspunktet nærmer seg.