

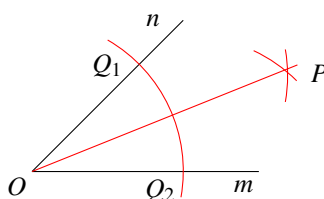
Konstruksjoner med passer og linjal

I utgangspunktet starter vi med et blankt ark. Vi kan alltid markere punkter på arket, og dersom vi har to punkter kan vi ved hjelp av linjalen trekke en rett linje gjennom de to punktene. Med passeren kan vi slå en sirkel om et hvilket som helst punkt, dvs. konstruere det geometriske stedet av punkter med en gitt avstand til et fast punkt. Linjalen har ikke noen målestokk, og i den klassiske settingen har ikke passeren noen hukommelse, dvs. i det øyeblikket vi løfter passeren fra papiret, så kollapser den. Vi kan imidlertid anta at vi kan flytte med oss radien til et annet punkt, dvs. opprettholde helt nøyaktig åpningen i passeren, siden vi kan vise at disse to passer-typene er ekvivalente i forhold til hva de kan konstruere. (se punktet *To sirkler med lik radius* nedenfor)

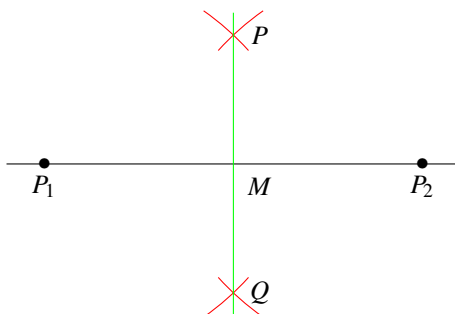
Skjæringen mellom to rette ikke-parallelle linjer gir oss et nytt punkt, skjæring mellom en linje og en sirkel gir oss inntil to nye punkter, og det samme gjelder skjæring mellom to sirkler.

Konstruksjoner

a) **Halvere en vinkel.** Vinkelen er definert av to linjer m og n som møtes i O . La Q_1 og Q_2 være punkter på henholdsvis m og n slik at $\|OQ_1\| = \|OQ_2\|$. La P være et nytt punkt slik at $\|PQ_1\| = \|PQ_2\|$. Linja gjennom O og P halverer den opprinnelige vinkelen.

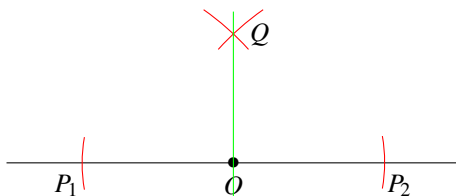


b) **Halvere et linjestykke.** Finn punkter P og Q slik at $\|PP_1\| = \|PP_2\|$ og $\|QP_1\| = \|QP_2\|$. Skjæringspunktet M mellom linja PQ og linja P_1P_2 er midtpunktet på linjestykket P_1P_2 .



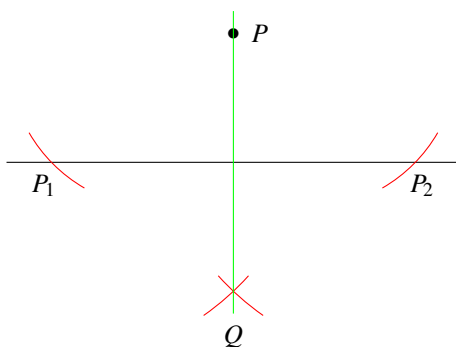
c) **Oppreise en normal til en linje i et gitt punkt.** Merk av punkter P_1 og P_2 på linja slik at $\|OP_1\| = \|OP_2\|$. Finn et nytt punkt Q slik at $\|QP_1\| = \|QP_2\|$. Linja gjennom O

og Q er linja vi leter etter.

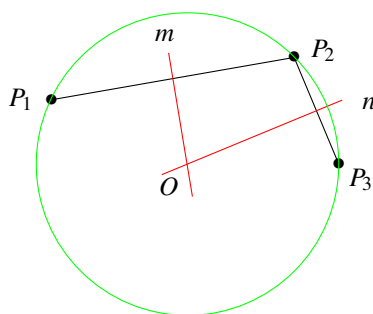


d) **Midtnormal.** Halver linjestykket og oppreis en normal i midtpunktet.

e) **Nedfelle en normal til en linje fra et gitt punkt utenfor linja.** Merk av punkter P_1 og P_2 på linja slik at $\|PP_1\| = \|PP_2\|$. Finn et nytt punkt Q slik at $\|QP_1\| = \|QP_2\|$. Linja gjennom P og Q er normalen til linja gjennom P .



f) **Sirkel gjennom tre gitte punkter.** Vi har gitt tre punkter (ikke på linje), P_1 , P_2 og P_3 . La m være midtnormalen til linjestykket P_1P_2 og n midtnormalen til linjestykket P_2P_3 . La O være skjæringspunktet mellom m og n . Da vil sirkelen gjennom P_2 med sentrum i O også gå gjennom P_1 og P_3 .

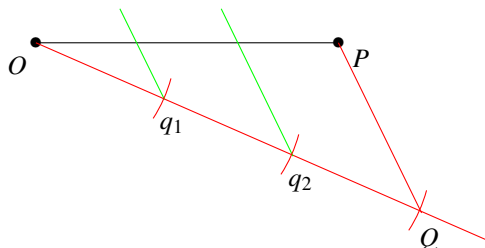


g) **Parallell til en linje gjennom et gitt punkt.** Nedfell en normal ℓ til linja gjennom punktet P . Oppreis en normal til ℓ gjennom P . Denne linja vil være parallell med den opprinnelige linja.

h) **Konstruerere multiplum av et linjestykke.** Sett av lengden av linjestykket langs med forlengelsen av linjestykket det ønskede antall ganger.

i) **Dele et linjestykke i N like store deler.** La OP være linjestykket som skal deles. Trekk en linje ℓ gjennom O som ikke går gjennom P . Ta en vilkårlig avstand i passeren og sett av denne avstanden N ganger langs ℓ . Start i O og la Q være slutt punktet. Trekk en linje gjennom P og Q . Konstruer paralleller til PQ gjennom delingspunktene på ℓ . Skjæringspunktene mellom disse parallellene og linja OP deler linjestykket OP i N like store deler.

I figuren lar vi $N = 3$.

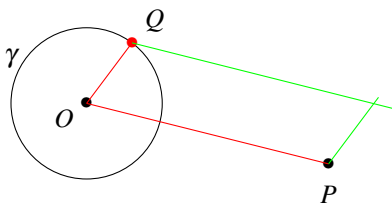


j) **Konstruksjon av rasjonale lengder.** Kombiner h) og i).

k) **To sirkler med lik radius.** Vi har gitt en sirkel γ med sentrum i O , og et punkt P . Vi skal konstruere en sirkel med sentrum i P og med samme radius som i γ .

Velg et punkt Q på γ . Trekk linjene OP og OQ . Konstruer paralleller til OP gjennom Q og til OQ gjennom P . Sirkelen med sentrum i P og som går gjennom skjæringspunktet mellom de to parallellene har samme radius som i γ .

En konsekvens av denne konstruksjonen er at det er ekvivalens mellom en passer som kollapser når den løftes fra papiret og en passer med hukommelse, dvs. at vi kan flytte avstander rundt i planet.



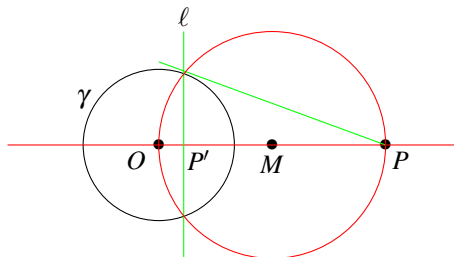
l) **Inversjon i en sirkel.** Vi skal finne inversjonen av punktet P over sirkelen γ , dvs. et punkt på linja OP slik at

$$\|OP\| \cdot \|OP'\| = R^2$$

der R er radius i sirkelen γ .

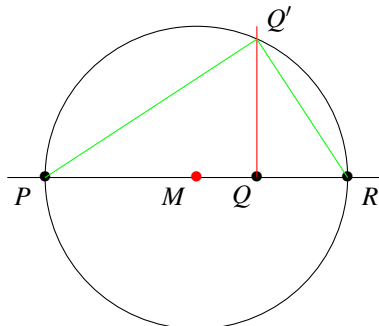
Vi trekker en linje gjennom sentrum O av sirkelen og punktet P . Midtpunktet på linjestykket OP kaller vi M . Vi slår en sirkel med sentrum i M og som går gjennom O (og P). Denne sirkelen skjærer γ i to punkter. Kall linja gjennom disse to punktene for ℓ .

Da vil skjæringspunktet P' mellom ℓ og linja OP være inversjonen av P over γ .



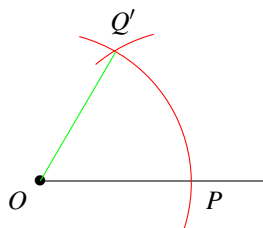
m) **Konstruksjon av kvadratrøtter.** Et konstruerbart tall er en lengde vi kan konstruere ved hjelp av passer og linjal når vi har gitt en enhetslengde. Vi har tidligere sett at alle rasjonale tall er konstruerbare. Vi ska se at også alle kvadratrøtter er konstruerbare, og dermed også alle summer og differanser av slike.

La P , Q og R være tre punkter på en linje slik at $\|PQ\| = p$ og $\|QR\| = q$. Halver linjestykket PR og slå en sirkel med sentrum i midtpunktet M gjennom P og R . Oppreis en normal til linja i punktet Q , og la Q' være skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen. Da vil $\|QQ'\| = \sqrt{pq}$. Dette følger siden trekantene $\triangle PQQ'$ og $\triangle Q'QR$ er likeformede og derfor $\frac{h}{p} = \frac{q}{h}$ eller $h = \sqrt{pq}$.



n) **60-graders vinkel.** Vi har gitt et punkt O på en linje. Lag en sirkelbue med en vilkårlig radius, sentrert i O . Kall skjæringspunktet mellom linja og sirkelbuen for P . Slå en sirkel om P med samme radius $\|OP\|$. La Q' være skjæringspunktet mellom de to sirkelbuene. Vinkelen $\angle Q'OP$ er 60 grader.

Ved å sette av denne vinkelen langs en sirkel kan vi konstruere en regulær 6-kant.



o) **En regulær 5-kant.** Sentralvinkelen i en regulær 5-kant innskrevet i en sirkel er $\frac{2\pi}{5}$, og vi har

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \Rightarrow (\cos \frac{2\pi}{5})^2 = (\frac{-1 + \sqrt{5}}{4})^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$$

Vi har $\|MP\| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Det betyr at cosinus til $\alpha = \angle PMO$ er $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Vi har

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{5}}{5} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 5}{10}}$$

Samtidig har vi

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\|MO\|}{\|MR\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\|OR\|^2 + (\frac{1}{2})^2}}$$

hvor $\|OR\|$ er lik cosinus til sentralvinkelen $\angle SOP$. Det betyr at

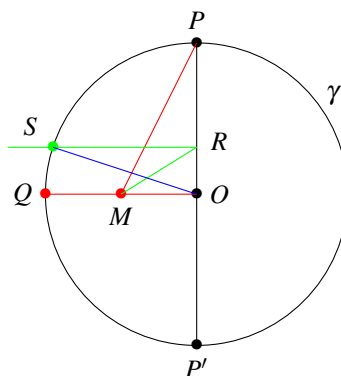
$$\frac{\sqrt{5} + 5}{10} = \frac{\frac{1}{4}}{\|OR\|^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

eller løst ut mhp $\|OR\|$;

$$\|OR\|^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$$

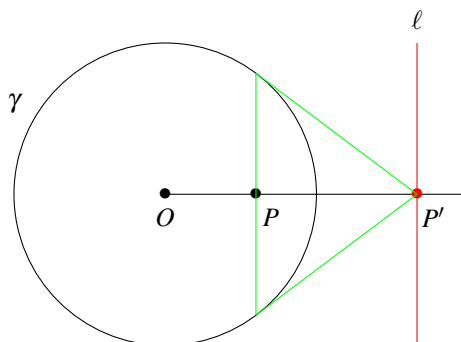
som viser at sentralvinkelen er $\frac{2\pi}{5}$.

Konstruksjonen er som illustrert i figuren. Vi starter med en sirkel γ med sentrum i O . Trekk en vilkårlig diameter PP' og oppreis en normal til denne i O . Skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen kaller vi Q . Halver linjestykket OQ og kall midtpunktet M . Trekk linja MP . Halver så vinkelen $\angle PMO$ og kall skjæringspunktet mellom halveringslinja og diagonalen PP' for R . Konstruer en parallell til OQ gjennom punktet R , og kall skjæringspunktet mellom denne parallellen og sirkelen for S . Sentralvinkelen $\angle SOP$ er nå $\frac{2\pi}{5}$. Ved å sette av $\|SP\|$ fra P og videre rundt sirkelen, vil man etter 5 step ende opp i S , og vi har konstruert en regulær 5-kant.



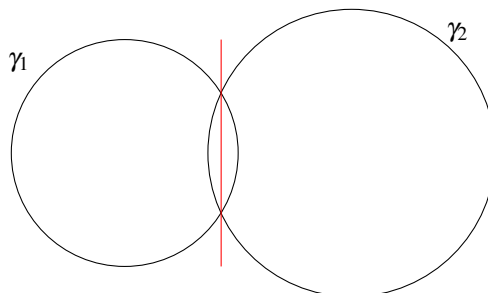
p) **Pol og polare.** Konstruer inversjonen P' til punktet P over sirkelen γ . Trekk en linje gjennom de tre punktene O (sentrum i sirkelen), P og P' . Konstruer en normal ℓ til denne linja gjennom P' . Linja ℓ er polaren til punktet P relativt til sirkelen γ .

Motsatt, gitt linja ℓ . Nedfell en normal fra O på ℓ . Kall fotpunktet P' . Konstruer inversjonen P til P' over sirkelen γ . Da er P polen til ℓ relativt til sirkelen γ .

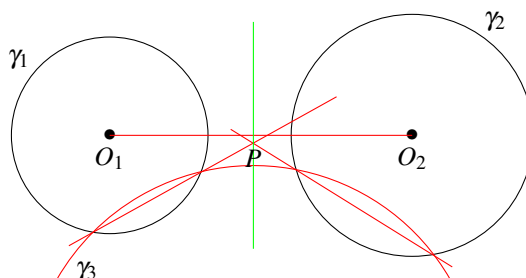


q) **Radikalaksen.** Potensen $\rho(P, \gamma)$ til et punkt P med hensyn på en sirkel γ med sentrum i O og radius r er gitt ved $\rho(P, \gamma) = \|OP\|^2 - r^2$. Alternativt kan vi se på en linje gjennom P som skjærer γ i punktene A og B . Da har vi $\rho(P, \gamma) = \|PA\| \cdot \|PB\|$ hvor vi regner med fortegn.

Radikalaksen til to sirkler, γ_1 og γ_2 , er mengden av punkter som har samme potens med hensyn på de to sirklene. Hvis sirklene overlapper vil radikalaksen være linja gjennom skjæringspunktene mellom sirklene.



Dersom de to sirklene er disjunkte er det litt mer jobb å konstruere radikalaksen. Begynn med å tegne inn en tredje sirkel γ_3 som overlapper med de to sirklene. La P være skjæringspunktet mellom radikalaksene til henholdsvis γ_1 og γ_3 , og til γ_2 og γ_3 . Nedfell en normal fra P på linja O_1O_2 mellom sentrene til de to sirklene. Denne normalen er radikalaksen til sirklene γ_1 og γ_2 .



r) **Røttene til en 2.gradslikning.** Vi skal finne røttene til 2.gradslikningen

$$x^2 - ax + b^2 = 0$$

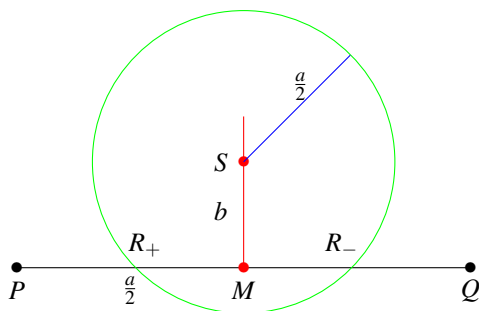
der a og b er konstruerbare tall.

Vi starter med å sette av punkter P og Q på en linje, slik at $\|PQ\| = a$. La M betegne midtpunktet til PQ . Oppreis en normal til linja i M og la S være et punkt på denne linja slik at $\|MS\| = b$. Slå en sirkel om S med radius $\frac{a}{2}$. La R_+ og R_- være skjæringspunktene mellom sirkelen og linja PQ . Da har vi at $x_+ = \|R_+Q\|$ og $x_- = \|R_-Q\|$ er de to løsningene av likningen. Merk at for at vi skal ha noen løsning må vi ha at $\frac{a}{2} - b \geq 0$, eller $(\frac{a}{2})^2 - b^2 \geq 0$, som svarer til at diskriminanten $\mathcal{D} = a^2 - 4b^2 \geq 0$.

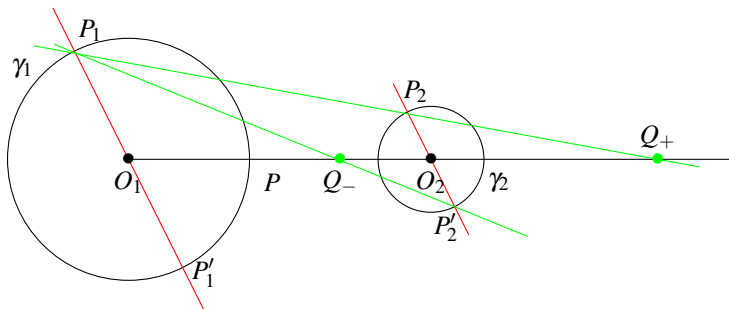
Vi kan regne ut $x_{\pm}$ ved å bruke Pythagoras setning,

$$x_{\pm} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b^2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4b^2}}{2}$$

som stemmer overens med abc-formelen.



s) **Homoteti-sentre, indre og ytre.** Trekk parallelle linjer gjennom sentrene O_1 og O_2 . Kall skjæringspunktene med sirklene for henholdsvis P_1, P'_1 og P_2, P'_2 . Det ytre homoteti-senteret Q_+ er skjæringspunktet mellom linjene P_1P_2 og O_1O_2 , mens det indre homoteti-senteret Q_- er skjæringspunktet mellom linjene $P_1P'_2$ og O_1O_2 .

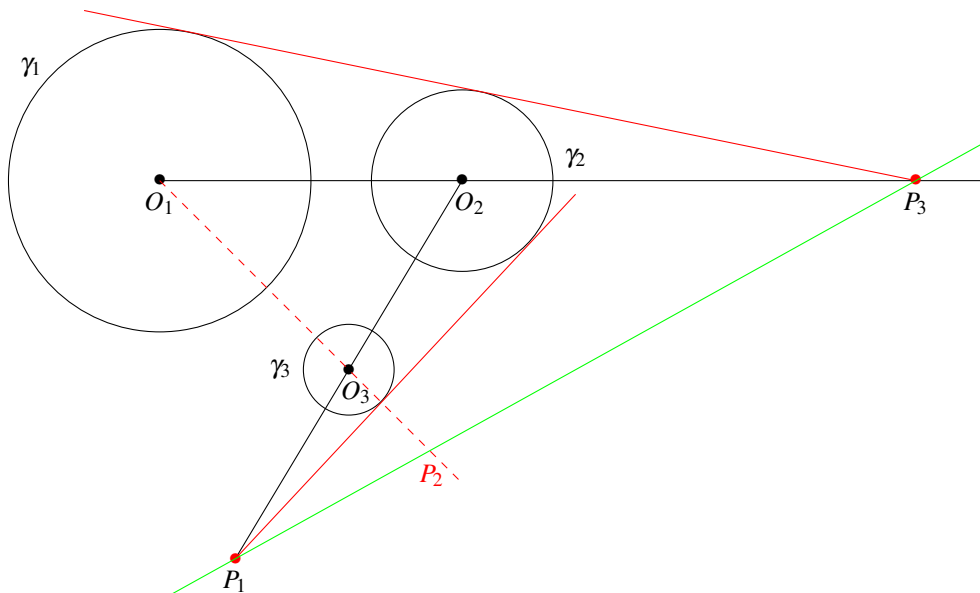


Legg merke til (vi får bruk for det senere) at trekantene $\triangle Q_1P_1Q_+$ og $\triangle Q_2P_2Q_+$ er likeformede og at vi derfor har

$$\frac{Q_1Q_+}{Q_2Q_+} = \frac{r_1}{r_2}$$

der r_1 og r_2 er radiene i de to sirklene.

t) **Monge-akse.** Monges teorem sier at de tre ytre (indre eller en kombinasjon) homoteti-sentrene for tre disjunkte sirkler ligger på linje. Denne linja kaller vi en **Monge-akse**. Monge-aksen konstrueres ved å konstruere to homoteti-sentre for to par av tre sirkler.



Bevis for Monges teorem Vi betrakter trekanten $\triangle Q_1Q_2Q_3$ og de tre Menelaospunktene P_1 , P_2 og P_3 . Fra bemerkningen over følger det at (her regner vi med fortegn i henhold til konvensjonen)

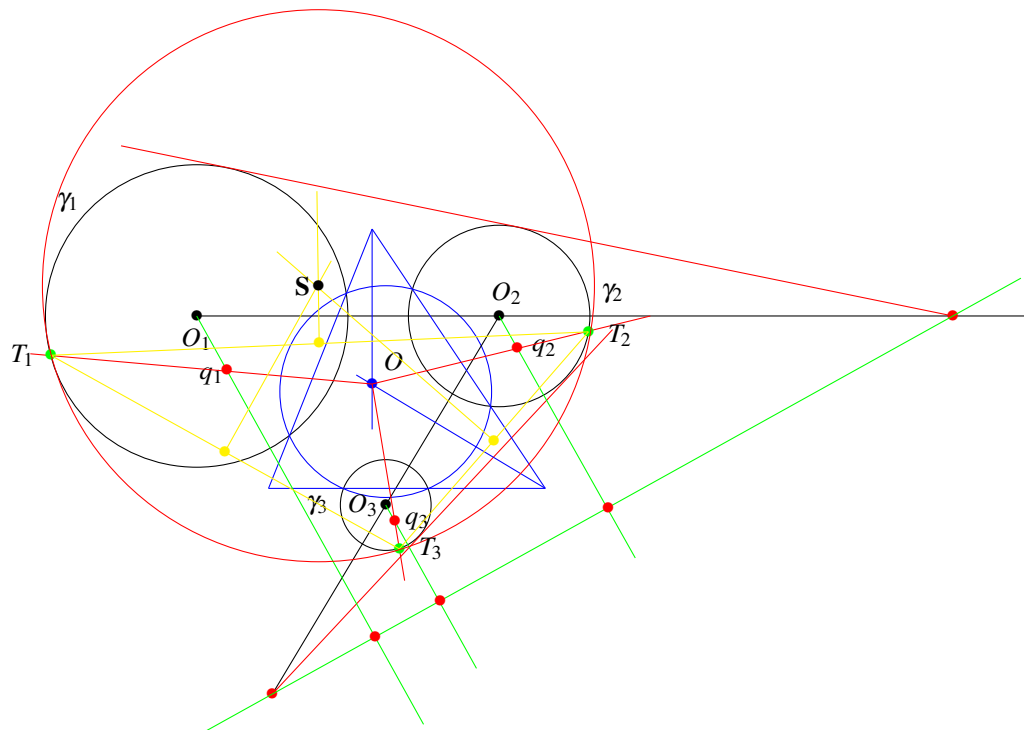
$$\frac{Q_1P_3}{P_3Q_2} \cdot \frac{Q_2P_1}{P_1Q_3} \cdot \frac{Q_3P_2}{P_2Q_1} = \frac{r_1}{-r_2} \cdot \frac{-r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{-r_1} = -1$$

og de tre punktene er kolleære etter Menelaos setning.

u) **Appolonius sirkler.** Vi har gitt tre sirkler γ_1 , γ_2 og γ_3 med senter i O_1 , O_2 og O_3 . Vi tegner inn en hjelpesirkel (blå) som snitter alle de tre sirklene, og bruker denne til først å finne radikalaksene mellom hver av de tre sirklene og hjelpesirklen, og deretter radikalaksene mellom sirkelparene γ_1 , γ_2 og γ_2 , γ_3 . Snittet O av disse to radikalaksene er radikalsenteret til de tre sirklene, dvs. punktet med samme potens til alle de tre sirklene.

Vi konstruerer så en Monge-akse (grønn linje) til de tre sirklene og finner så polene til Monge-aksen over de tre sirklene. Kall disse punktene q_1 , q_2 og q_3 . Trekk deretter stråler fra O gjennom de tre punktene q_1 , q_2 og q_3 . Disse strålene skjærer de tre sirklene i de tre grønne punktene T_1 , T_2 og T_3 . Den søkte sirkelen er sirkelen som går gjennom

T_1 , T_2 og T_3 , med sentrum i S og markert i rødt.



/Undervisning/MAT2500/H2021/konstruksjoner