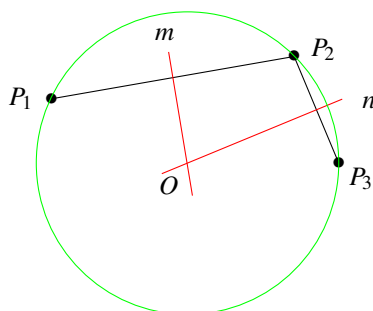


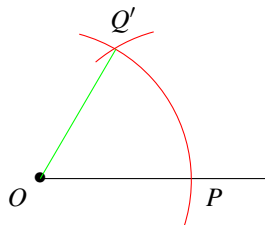
Konstruksjoner med passer og linjal

1. Sirkel gjennom tre gitte punkter. Vi har gitt tre punkter (ikke på linje), P_1 , P_2 og P_3 . La m være midtnormalen til linjestykket P_1P_2 og n midtnormalen til linjestykket P_2P_3 . La O være skjæringspunktet mellom m og n . Da vil sirkelen gjennom P_2 med sentrum i O også gå gjennom P_1 og P_3 .



2. 60-graders vinkel. Vi har gitt et punkt O på en linje. Lag en sirkelbue med en vilkårlig radius, sentrert i O . Kall skjæringspunktet mellom linja og sirkelbuen for P . Slå en sirkel om P med samme radius $\|OP\|$. La Q' være skjæringspunktet mellom de to sirkelbuene. Vinkelen $\angle Q'OP$ er 60 grader.

Ved å sette av denne vinkelen langs en sirkel kan vi konstruere en regulær 6-kant.



3. En regulær 5-kant. Sentralvinkelen i en regulær 5-kant innskrevet i en sirkel er $\frac{2\pi}{5}$, og vi har

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \Rightarrow (\cos \frac{2\pi}{5})^2 = (\frac{-1 + \sqrt{5}}{4})^2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{8}$$

Vi har $\|MP\| = \sqrt{1^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Det betyr at cosinus til $\alpha = \angle PMO$ er $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Vi har

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{5}}{5} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5} + 5}{10}}$$

Samtidig har vi

$$\cos(\frac{\alpha}{2}) = \frac{\|MO\|}{\|MR\|} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{\|OR\|^2 + (\frac{1}{2})^2}}$$

hvor $\|OR\|$ er lik cosinus til sentralvinkelen $\angle SOP$. Det betyr at

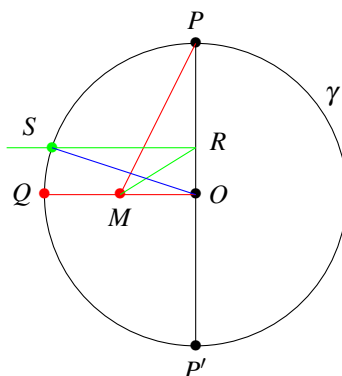
$$\frac{\sqrt{5}+5}{10} = \frac{\frac{1}{4}}{\|OR\|^2 + (\frac{1}{2})^2}$$

eller løst ut mhp $\|OR\|$;

$$\|OR\|^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$$

som viser at sentralvinkelen er $\frac{2\pi}{5}$.

Konstruksjonen er som illustrert i figuren. Vi starter med en sirkel γ med sentrum i O . Trekk en vilkårlig diameter PP' og oppreis en normal til denne i O . Skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen kaller vi Q . Halver linjestykket OQ og kall midtpunktet M . Trekk linja MP . Halver så vinkelen $\angle PMO$ og kall skjæringspunktet mellom halveringslinja og diagonalen PP' for R . Konstruer en parallell til OQ gjennom punktet R , og kall skjæringspunktet mellom denne parallellen og sirkelen for S . Sentralvinkelen $\angle SOP$ er nå $\frac{2\pi}{5}$. Ved å sette av $\|SP\|$ fra P og videre rundt sirkelen, vil man etter 5 step ende opp i S , og vi har konstruert en regulær 5-kant.



Alternativ konstruksjon:

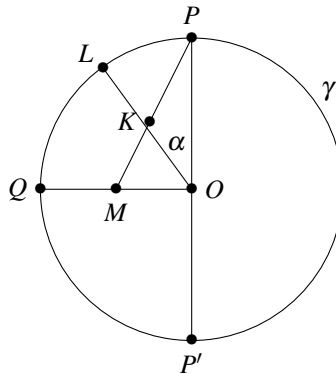
Vi starter med en sirkel γ med sentrum i O og radius 1. Trekk en vilkårlig diameter PP' og oppreis en normal til denne i O . Skjæringspunktet mellom normalen og sirkelen kaller vi Q . Halver linjestykket OQ og kall midtpunktet M . Det betyr at $\|OM\| = \frac{1}{2}$. Trekk linja MP . Ved Pythagoras har vi at $\|MP\| = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Sett av avstanden $\|MO\|$ fra M langs MP . Det gir oss punktet K , hvor $\|KP\| = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Slå en sirkel om P med radius $\|KP\|$ og kall skjæringspunktet med sirkelen γ for L . Kall vinkelen $\angle LOP = \alpha$. Da har vi $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Det betyr at

$$\cos \alpha = 1 - 2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{6-2\sqrt{5}}{16}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

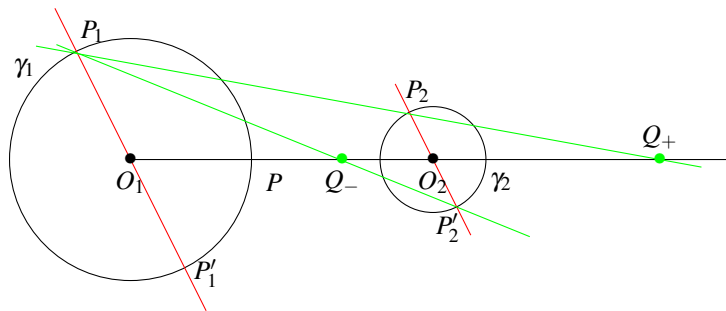
og dermed

$$\cos 2\alpha = 2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 - 1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

som betyr at $2\alpha = \frac{2\pi}{5}$ og $\alpha = \frac{\pi}{5}$, som er en 10-del av hele sirkelen.



4. Homoteti-sentre, indre og ytre. Trekk parallelle linjer gjennom sentrene O_1 og O_2 . Kall skjæringspunktene med sirklene for henholdsvis P_1, P'_1 og P_2, P'_2 . Det ytre homoteti-senteret Q_+ er skjæringspunktet mellom linjene P_1P_2 og O_1O_2 , mens det indre homoteti-senteret Q_- er skjæringspunktet mellom linjene $P_1P'_2$ og O_1O_2



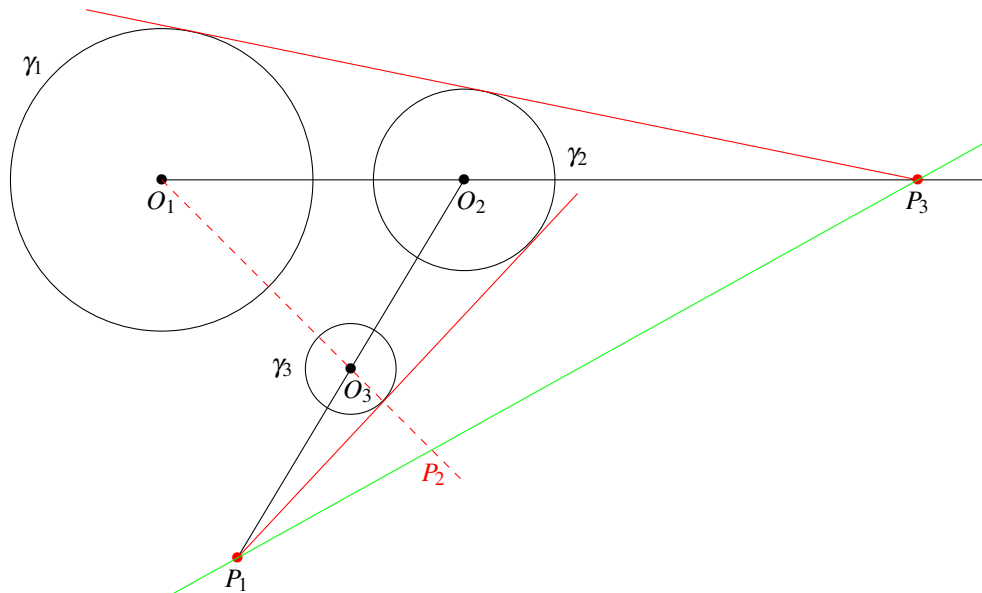
Legg merke til (vi får bruk for det senere) at trekantene $\triangle Q_1P_1Q_+$ og $\triangle Q_2P_2Q_+$ er likeformedede og at vi derfor har

$$\frac{Q_1Q_+}{Q_2Q_+} = \frac{r_1}{r_2}$$

der r_1 og r_2 er radiene i de to sirklene.

5. Monge-akse. Monges teorem sier at de tre ytre (indre eller en kombinasjon) homoteti-sentrene for tre disjunkte sirkler ligger på linje. Denne linja kaller vi en **Monge-akse**.

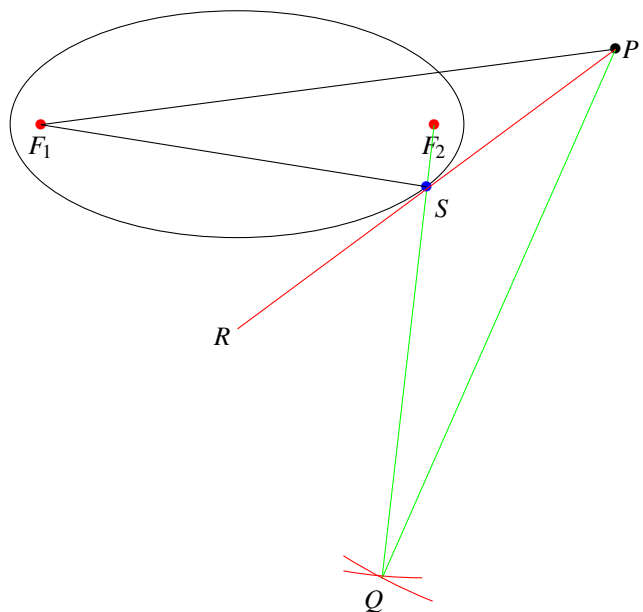
Monge-aksen konstrueres ved å konstruere to homoteti-sentre for to par av tre sirkler.



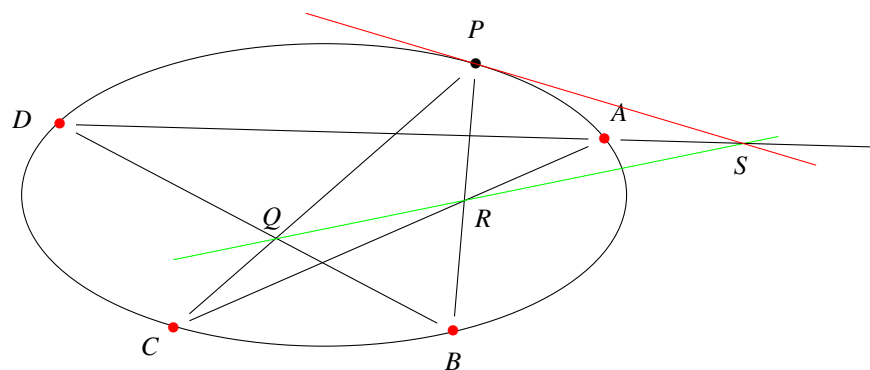
Bevis for Monges teorem Vi betrakter trekanten $\triangle Q_1Q_2Q_3$ og de tre Menelaospunktene P_1 , P_2 og P_3 . Fra bemerkningen over følger det at (her regner vi med fortegn i henhold til konvensjonen)

$$\frac{Q_1P_3}{P_3Q_2} \cdot \frac{Q_2P_1}{P_1Q_3} \cdot \frac{Q_3P_2}{P_2Q_1} = \frac{r_1}{-r_2} \cdot \frac{-r_2}{r_3} \cdot \frac{r_3}{-r_1} = -1$$

og de tre punktene er kolleære etter Menelaos setning.



6. Konstruere en tangent til en ellipse fra et punkt utenfor ellipsen. Vi finner et punkt Q slik at $PQ = PF_1$, og $F_2Q = 2a$, der a er den store halvaksen i ellipsen. La S være skjæringspunktet mellom ellipsen og F_2Q . Da har vi $F_1S + SF_2 = 2a$ og det følger at $F_1S = QS$. Det betyr at $\triangle PF_1S \sim \triangle PQS$ og $\angle RSF_1 = \angle RSQ$. Men $\angle RSQ = \angle PSF_2$ (toppvinkler) og derfor $\angle RSF_1 = \angle PSF_2$. Ved speilingssegenskapen til en ellipse følger det at linja PS er tangent til ellipsen.



5. Konstruere en tangent til en ellipse i et punkt på ellipsen. Marker 4 andre punkter A , B , C og D på ellipsen. Vi skal bruke Pascals setning på de to triplene (P, D, C) og (A, P, B) . (Merk at punktet P er med i begge triplene). Setningen sier at de tre skjæringspunktene $\{Q\} = DB \cap CP$, $\{R\} = PB \cap CA$ og $\{S\} = DA \cap PP$ ligger på linje. Linja PP er tangenten i punktet P . Vi trekker linja QR og lar S være skjæringspunktet med DA . Linja SP tangerer ellipsen i P .

/Undervisning/MAT2500/H2023/Konstruksjoner/konstruksjoner