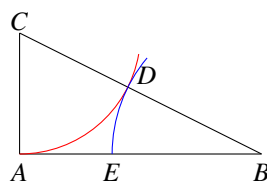


Konstruksjon av et regulært pentagon

A. Konstruksjon av gyldne snitt

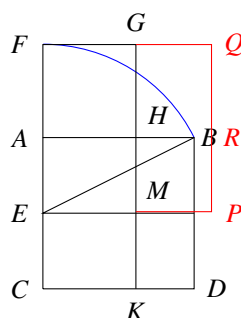


I en rettvinklet trekant $\triangle ABC$ lar vi $AB = 2AC$. Det gir $BC = \sqrt{5} \cdot AC = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot AB$. Vi har at $CD = AC = \frac{1}{2} \cdot AB$ og $BD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot AB$. La $EB = BD$. Det betyr at E deler AB i det gyldne snitt,

$$\frac{AE}{EB} = \frac{EB}{AB} \quad \text{eller} \quad AE \cdot AB = EB^2$$

Hvis vi setter $AB = 1$ sier dette at $1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2$.

B. Alternativ konstruksjon, uten lengdemål



I kvadratet $\square ABCD$ er E midtpunktet på AC . Punktet F ligger langs AC i avstand EB . Firkanten $\square FGAH$ er et kvadrat med side AF . Det betyr at $FG = AH = EM = CK = AF$. Punktet P ligger på EM slik at $MP = EC = AE = MH$. Arealet av det røde rektangelet $\square MPQG$ er summen av arealene av $\square MPRH$ og $\square HRQG$. Det betyr at

$$\begin{aligned} CF \cdot AF + AE^2 &= EF \cdot CK + CE \cdot CK + AE^2 \\ &= EF \cdot CK + HR \cdot HG + MP \cdot HM \\ &= EF \cdot EP = EF^2 \end{aligned}$$

Vi har $EF = EB$, $EB^2 = AB^2 + AE^2$ (ved Pythagoras) og $AB = AC$. Derfor er

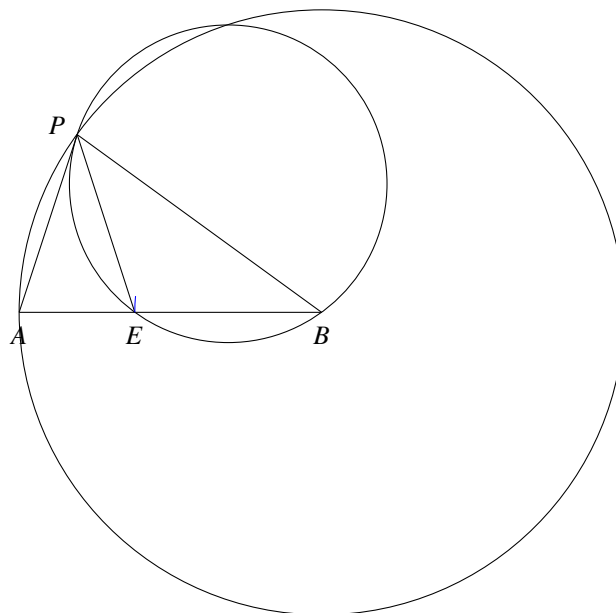
$$CF \cdot AF = EF^2 - AE^2 = EB^2 - AE^2 = AB^2 = AC^2$$

eller

$$\frac{CF}{AC} = \frac{AC}{AF}$$

som betyr at A deler linjestykket CF i henhold til det gyldne snitt.

C. Konstruksjon av likebeint trekant hvor toppvinklen er halvparten av grunnvinklene.



1. Vi tar utgangspunkt i et linjestykke av lengde 1 som er delt etter det gyldne snitt, dvs. $AE \cdot AB = EB^2$ og merker av et punkt P på sirkelen med sentrum i B , slik at $AP = EB$. Dermed har vi $AE \cdot AB = AP^2$.

2. Setningen om punkts potens brukt på punktet A og sirkelen gjennom PEB gir at AP tangerer denne sirkelen i P .

3. Likhet av periferivinkler gir at $\angle APE = \angle PBE$.

4. Vi har at

$$\frac{AE}{AP} = \frac{AE}{EB} = \frac{EB}{PB}$$

og ved halveringssetningen vil EP dele $\angle PBE$ i to like store deler, som betyr at

$$\angle APE = \angle PBE = \angle EPB$$

5. Trekanten $\triangle ABP$ er likebeint og $\angle PAB = \angle APB$.

6. Det betyr at vi har

$$\angle PAB = \angle APB = \angle APE + \angle EPB = \angle PBE + \angle PBE = 2 \cdot \angle PBA$$

og

$$\angle PAB + \angle APB + \angle PBA = 2 \cdot \angle PBA + 2 \cdot \angle PBA + \angle PBA = 5 \cdot \angle PBA$$

Vinkelsummen i trekanten $\triangle ABP$ er lik π , det vil si at $\angle PBA = \frac{\pi}{5}$.