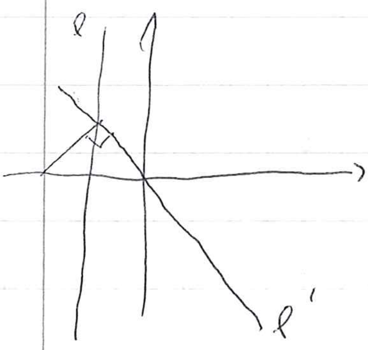
Løsningsforslag MAT 2500 Høst 2017.

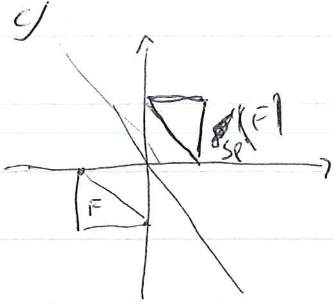
1 $l: x+1=0$ $l': x+y=0$



a) $l \cap l' = (-1,1)$ så $s_l \circ s_{l'}$ har fikspunkt i $(-1,1)$,
og er orienteringsbevarende, så $s_l \circ s_{l'}$ er en rotasjon
om $(-1,1)$.
$s_l \circ s_{l'}(0,0) = s_l(0,0) = (-2,0)$, så rotasjons-
vinkelen er $-\frac{\pi}{2}$.

b) $\rho' = t_{(2,0)} \circ s_l \circ s_{l'}$ $\Rightarrow$ $\rho'(0,0) = t_{2,0}(-2,0) = 0,0$.
og ρ' er orienteringsbevarende
så ρ' er en rotasjon om $(0,0)$.
$\rho'(-1,1) = t_{(2,0)}(-1,1) = (1,1)$, så
rotasjonsvinkelen er $-\frac{\pi}{2}$.

c)

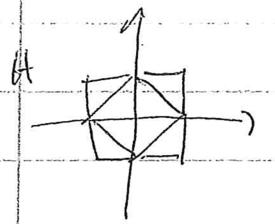


$G = F \cup s_{l'}(F)$

Symmetrier til G:
- Rotasjon om $(0,0)$ med vinkel π.
- speiling om $x+y=0$
- speiling om $x-y=0$.
- identiteten

1d

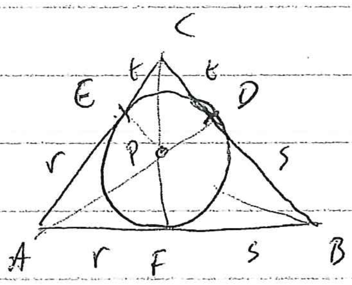
$H = G \cup \rho'(G)$



Symmetrier: rotasjoner om $(0,0)$ med vinkel $0, \pi/2, \pi, \frac{3\pi}{2}$.

speilinger om $x=0$, $y=0$, $x+y=0$, $x-y=0$

2a



$AF = AE$, $BF = BD$, $CE = CD$

så

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\,\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\,\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = \frac{AF}{FB}\,\frac{BD}{DC}\,\frac{CE}{EA} = \frac{AF}{AE}\cdot\frac{BD}{BF}\,\frac{CE}{CD} = 1.$$

Av Ceva's setning har AD, BE og CF et felles punkt.

b) La Q være sentrum i innskrevet sirkel. Da er Q snitt mellom AD', BE', CF', der $D' \in BC$, $E' \in CA$, $F' \in AB$ og

$$\frac{AF'}{F'B} = \frac{AC}{BC}, \quad \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC}, \quad \frac{CE'}{E'A} = \frac{BC}{AB}$$ (halveringslinje setning)

$P = Q \iff F = F',\ D = D',\ E = E'$. (La $AF = r$, $BD = s$, $CE = t$)

$\iff \frac{r}{s} = \frac{r+t}{s+t}, \quad \frac{s}{t} = \frac{r+s}{r+t}, \quad \frac{r}{t} = \frac{r+s}{t+s}$

$\iff rs + rt = rs + st, \quad rs + st = rt + st, \quad rt + rs = rt + st$

$\iff rt = st, \quad rs = rt, \quad rs = st$

$\iff \underline{r = s = t}$

): $P = Q \iff \Delta ABC$ er likesidet!

3

a) $l_1: \ 2x_0 - x_1 + x_2 = 0$

$l_2: \ x_0 - 3x_1 + 4x_2 = 0$

$$P = l_1 \wedge l_2 : \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \underline{(-1 : -7 : -5)}$$

$$PQ : \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \underline{-7x_0 + x_1 = 0}$$

b)

$C_a: \ x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 + a x_1 x_2 = 0$

$l_b: \ 5b x_1 + x_2 = 0$

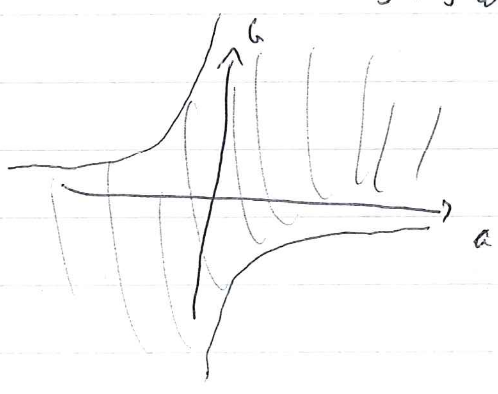
$C_a \wedge l_b$: setter $x_2 = -5b x_1$

$$x_0^2 + 2x_0x_1 - 4x_1^2 - 5ab \ x_1^2 = 0$$

$$x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(4 + 5ab)}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{5 + 5ab}}{2}$$
$$= 1 \pm \sqrt{5 + 5ab}$$

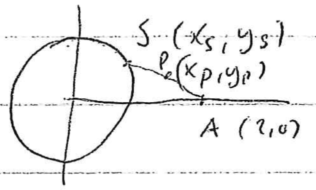
~~to~~ minst en løsning når

$5 + 5ab \geq 0$, dvs. $\underline{ab \geq -1}$



c) l_b tangerer C_a når der er en løsning, dvs $\underline{\underline{ab = -1}}$

4 a) $C: x^2 + y^2 = 1 \qquad A = (2,0)$



$$x_p = \tfrac{1}{2}(x_s + 2) \qquad y_p = \tfrac{1}{2} y_s$$

$$\Rightarrow \quad x_s = 2x_p - 2 \qquad y_s = 2y_p$$

$$x_s^2 + y_s^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad (2x_p - 2)^2 + (2y_p)^2 = 1$$

$$(x_p - 1)^2 + y_p^2 = \tfrac{1}{4}$$

P ligger på en sirkel med sentrum i $(1,0)$ og radius $\tfrac{1}{2}$, Ligning: $(x_p - 1)^2 + y_p^2 = \tfrac{1}{4}$

b) Ligning til ei linje gjennom A og stigningstall k:

$$y = k(x-2)$$

tangerer ~~skjærer~~ C når $x^2 + (k(x-2))^2 = 1$

har en løsning. dvs

$$(k^2+1)x^2 - 4k^2x + 4k^2 - 1 = 0$$

har en løsning dvs.

$$(4k^2)^2 - 4(k^2+1)(4k^2-1) = 0$$

$$16k^4 - 16k^4 - 12k^2 + 4 = 0 \iff 3k^2 - 1 = 0$$

$$\iff k = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

tangent linjer: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$