

Løsningsforslag, eksamen MAT 2500, 2. desember 2019

OPPGAVE 1 Vi skal finne et uttrykk for sammensettingen av to stive bevegelser. Den ene, s_1 , er en speiling om linja $y = 1$, og den andre, s_2 , er en speiling om linja $y = x$.

- a) Finn fikspunktene til sammensettingene $s_1 \circ s_2$ og $s_2 \circ s_1$. Er de like?
- b) De to sammensettingene i a) beskriver begge rotasjoner i planet. Finn rotasjonssentrene og vinkelen til de to sammensettingene.

Løsning: a) Fikspunktene til de to sammensettingene er begge skjæringspunktet mellom de to refleksjonsaksene, dvs. punktet $(1, 1)$.

b) Rotasjonssentrene er de samme som fikspunktene, altså $(1, 1)$. Rotasjonsvinkelen er to ganger vinkelen mellom de to refleksjonsaksene. For $s_1 \circ s_2$ er denne vinkelen $-\frac{\pi}{4}$ og rotasjonsvinkelen er derfor $-\frac{\pi}{2}$. For $s_2 \circ s_1$ får vi den motsatte vinkelen, dvs. $\frac{\pi}{2}$.

OPPGAVE 2 To linjer i det projektive planet $\mathbb{RP}^2$ er gitt ved

$$\ell : x_0 + 2x_1 + x_2 = 0, \quad m : x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

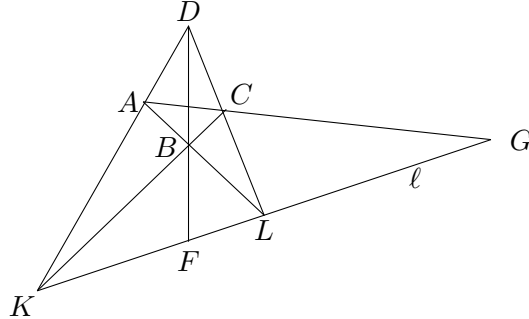
- a) Finn homogene koordinater for skjæringspunktet P mellom m og ℓ .
- b) La $Q = (0 : -1 : 1)$. Finn en likning for linja n gjennom P og Q .

Løsning: a) Trekker vi de to likningene fra hverandre, får vi $3x_1 = 0$. Setter vi $x_1 = 0$ inn i en av likningene får vi i tillegg $x_0 + x_2 = 0$. Det gir $P = (1 : 0 : -1)$.

b) Likningen for linja gjennom P og Q er gitt ved

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -x_0 - x_1 - x_2 = -(x_0 + x_1 + x_2) = 0$$

OPPGAVE 3



Vi har gitt en firkant $ABCD$. Sidekantene AD og BC møtes i K og sidekantene AB og CD møtes i L . Vi kaller linja gjennom K og L for ℓ . Diagonalen BD skjærer ℓ i punktet F og diagonalen AC skjærer ℓ i G .

- a) Bruk Cevas setning på trekanten DKL og punktet B til å vise at

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{AK}} \cdot \frac{\overline{KF}}{\overline{FL}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{CD}} = 1$$

- b) Bruk Menelaos setning på trekanten DKL og linja ACG til å vise at

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{AK}} \cdot \frac{\overline{KG}}{\overline{GL}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{CD}} = -1$$

- c) To punktpar (A, B) og (C, D) er harmonisk konjugerte dersom

$$(AB, CD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}} = -1$$

Bruk a) og b) til å vise at punktparene (K, L) og (F, G) er harmonisk konjugerte.

Løsning: a) Cevas setning sier at de tre Ceva-linjene AL , DF og KC er konkurrente hvis og bare hvis det oppgitte forholdet er 1.

b) Vi har tre Menelaos-punkter, $A \in DK$, $C \in LD$ og $G \in KL$. De tre punktene er kolineære hvis og bare hvis produktet av delingsforholdene (som oppgitt) er -1.

- c) Dersom vi deler produktene i a) og b) på hverandre får vi

$$-1 = \frac{1}{-1} = \frac{\frac{\overline{DA}}{\overline{AK}} \cdot \frac{\overline{KF}}{\overline{FL}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{CD}}}{\frac{\overline{DA}}{\overline{AK}} \cdot \frac{\overline{KG}}{\overline{GL}} \cdot \frac{\overline{LC}}{\overline{CD}}} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KG}} \cdot \frac{\overline{GL}}{\overline{FL}} = \frac{\overline{KF}}{\overline{KG}} \cdot \frac{\overline{LG}}{\overline{LF}} = (KL, FG)$$

OPPGAVE 4

- a) La ω være sirkelen med likning $x^2 + y^2 = 1$ og $P = (1, 2)$ et punkt i planet. La videre Q være et punkt på polaren $\ell = \ell(P)$ til P med hensyn på ω . Forklar hvorfor P ligger på polaren til Q med hensyn på ω .
- b) Vis at dersom tre linjer møtes i et felles punkt, så vil de tre polene til linjene være kolineære.

Løsning: a) Ved La Hires setning har vi at P ligger på polaren til Q hvis og bare hvis Q ligger på polaren til P . Vi kan også regne det ut; ℓ er gitt ved likningen $x + 2y = 1$, og et punkt på denne linja har formen $Q = (1 - 2t, t)$. Polaren til Q er gitt ved $(1 - 2t)x + ty = 1$, og $P = (1, 2)$ passer inn i denne likningen; $(1 - 2t) + 2t = 1$.

b) Vi kaller linjene ℓ , ℓ' og ℓ'' , med poler P , P' og P'' . La Q være det felles skjæringspunktet mellom de tre linjene. Da har vi at $Q \in \ell = \ell(P)$, $Q \in \ell' = \ell(P')$ og $Q \in \ell'' = \ell(P'')$. Ved La Hires setning følger det at $P, P', P'' \in \ell(Q)$, som betyr at de ligger på linje.

OPPGAVE 5

- a) La P være et konvekst polyeder i det euklidske rommet E^3 med 12 hjørner og 24 kanter. Hvor mange sideflater har P ?
- b) Polyederet P består av trekanter og firkanter. Hvor mange av hver? Begrunn svaret.

Løsning: a) Ved Eulers formel, $2 = V - E + F$, får vi $F = 2 - V + E = 2 - 12 + 24 = 14$.

b) La τ være antall trekanter og ϕ antall firkanter. Vi har $\tau + \phi = 14$. Teller vi antall kanter får vi $3\tau + 4\phi$. Hver kant er kant i to flater, så vi får antall kanter; $24 = \frac{1}{2}(3\tau + 4\phi)$. Kombinerer vi de to likningene, får vi $\tau = 8$ og $\phi = 6$, altså 8 trekanter og 6 firkanter.