

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT2500 — Geometri

Eksamensdag: 5. desember 2022

Tid for eksamen: 09:00–13:00

Oppgavesettet er på 9 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 (vekt 15 poeng)

Et kjeglesnitt $\mathcal{C}$ i $\mathbb{R}^2$ har likning

$$9x^2 - 18x + 4y^2 + 8y = 23.$$

Skriv likningen til kjeglesnittet på standardform, bestem hvilken type det er og lag en skisse der relevante punkter og størrelser fremkommer.

1 Løsning Vi fullfører kvadratene og skriver

$$\begin{aligned} 9x^2 - 18x + 4y^2 + 8y &= 23 \\ (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 3 + 3^2 + (2y)^2 + 2 \cdot 2y \cdot 2 + 2^2 &= 23 + 3^2 + 2^2 \\ (3x - 3)^2 + (2y + 2)^2 &= 36 \\ 9(x - 1)^2 + 4(y + 1)^2 &= 36. \end{aligned}$$

Ved å dele på 36 får vi da likningen på standardform

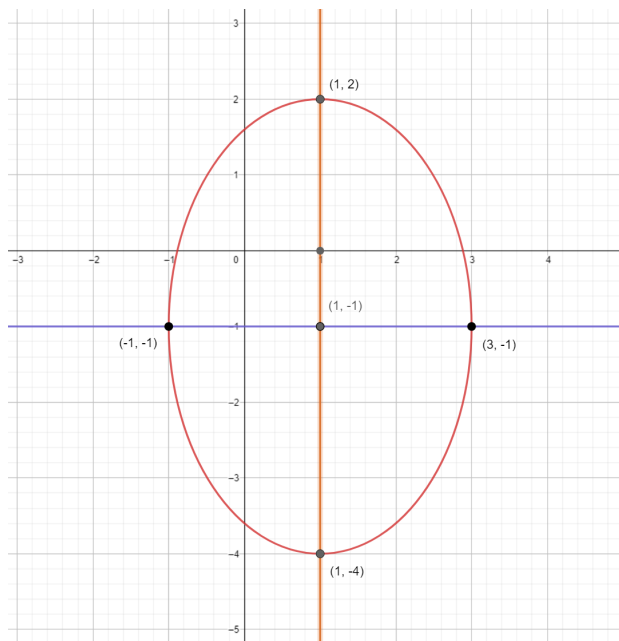
$$\frac{(x - 1)^2}{2^2} + \frac{(y + 1)^2}{3^2} = 1.$$

Dette er standardformen til en ellipse med sentrum i $(1, -1)$ og akser linjene $x = 1$ og $y = -1$. Halvaksene er 2 og 3, så toppunktene er henholdsvis $(-1, -1)$ og $(3, -1)$, samt $(1, -4)$ og $(1, 2)$. Se Figur 1.

Oppgave 2 (vekt 15 poeng)

Et konvekst polyeder P i $\mathbb{R}^3$ består av regulære trekantede og femkanter slik at to trekantede og to femkanter møtes i hvert hjørne.

(Fortsettes på side 2.)



Figur 1: Kjeglesnitt i Oppgave 1

2a (vekt 5 poeng)

Hvor mange hjørner har polyederet?

2a Løsning En regulær trekant har hjørnevinkel $\frac{\pi}{3}$. En regulær femkant, kan ved å legge linjestykker fra sentrum til hvert hjørne, deles inn i fem likebeinte trekanter, der sentralvinkelen er $\frac{2\pi}{5}$ og de to like vinklene er $\frac{3\pi}{10}$. En hjørnevinkel i en regulær femkant består av to slike vinkler og er dermed $\frac{3\pi}{5}$. Siden to trekanter og to femkanter møtes i hvert hjørne p , vil vinkeldefekten i hvert hjørne av polyederet P være

$$\begin{aligned}\alpha_p &= 2\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3} - 2 \cdot \frac{3\pi}{5} \\ &= \frac{30\pi - 10\pi - 18\pi}{15} \\ &= \frac{2\pi}{15}.\end{aligned}$$

Vinkeldefekten til det konvekse polyederet P er summen av vinkeldefektene over alle hjørnene på den ene siden og samtidig, ved Descartes teorem, lik 4π . Vi lar v betegne antall hjørner og får likningen

$$\sum_{p \in P} \alpha_p = v \cdot \frac{2\pi}{15} = 4\pi.$$

Det følger at $v = 30$, og P har 30 hjørner.

2b (vekt 10 poeng)

Hvor mange trekanter og femkanter består polyederet av?

(Fortsettes på side 3.)

2b Løsning La e være antall kanter, f antall flater, τ antall trekanter og φ antall femkanter på P . Siden hvert hjørne p har fire flater og dermed fire kanter inn til seg, vil $\deg p = 4$. Da har vi ved Setning 3.7 i Geometriheftet at

$$\begin{aligned} 2e &= \sum \deg p \\ &= 4v \\ &= 120. \end{aligned}$$

Dette gir $e = 60$.

Ved Eulers formel kan vi nå regne ut antall flater:

$$\begin{aligned} f &= 2 - v + e \\ &= 2 - 30 + 60 \\ &= 32. \end{aligned}$$

Videre får vi ved opptelling av flater og kanter de to likningene

$$\begin{aligned} f &= 32 = \tau + \varphi \\ 2e &= 120 = 3\tau + 5\varphi. \end{aligned}$$

Dette er et likningsystem med løsning $\tau = 20$ og $\varphi = 12$. Polyederet P består altså av 20 trekanter og 12 femkanter.

Oppgave 3 (vekt 15 poeng)

Gitt en trekant $\triangle ABC$ der $AB = 7$ cm, $BC = 5$ cm og $AC = 4$ cm.

3a (vekt 10 poeng)

Det er markert et punkt D mellom B og C på linja ℓ_{BC} slik at $BD = 3$ cm, et punkt E mellom A og C på linja ℓ_{AC} slik at $AE = 1$ cm, og et punkt F på linja ℓ_{AB} som ikke ligger mellom A og B , men 2 cm fra A . Bruk Menelaos' setning til å vise at D , E og F er kollineære.

3a Løsning Punktene D , E og F er Menelaospunkter for $\triangle ABC$. Ved Menelaos' setning er disse på linje hvis og bare hvis

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} = -1.$$

For $\triangle ABC$ har vi (uten benevning)

$$\overline{BD} = 3, \quad \overline{DC} = 2, \quad \overline{CE} = 3, \quad \overline{EA} = 1, \quad \overline{AF} = -2 \quad \text{og} \quad \overline{FB} = 9.$$

Satt inn i Menelaos' setning får vi som ønsket

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{-2}{9} = -1,$$

og vi konkluderer at punktene D , E og F er kollineære.

(Fortsettes på side 4.)

3b (vekt 5 poeng)

Vi avsetter et nytt punkt E' mellom A og C på linja ℓ_{AC} slik at $AE' = 2$ cm. La F' være skjæringspunktet mellom $\ell_{DE'}$ og ℓ_{AB} . Finn AF' .

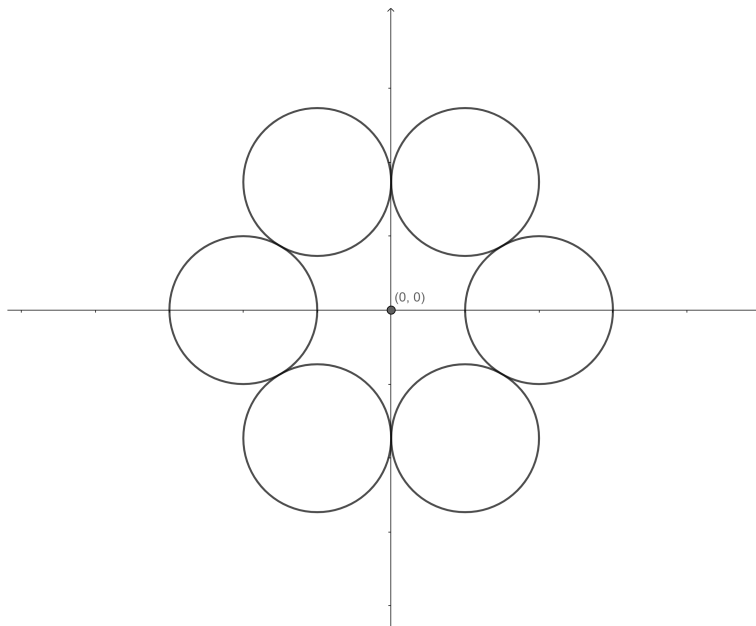
3b Løsning Vi skriver $x = AF'$. For at F' skal være på linja $\ell_{DE'}$, må F' ligge utenfor linjestykket AB og til venstre for A , så $\overline{AF} = -x$ og $\overline{FB} = x+7$. Vi noterer videre at $\overline{CE'} = \overline{E'A} = 2$, $\overline{BD} = 3$ og $\overline{DC} = 2$, og bruker deretter Menelaos' setning til å sette opp likningen

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{-x}{x+7} = -1.$$

Løser vi denne med hensyn på x , får vi at $x = AF' = 14$.

Oppgave 4 (vekt 25 poeng)

Seks like store sirkler danner en figur i $\mathbb{R}^2$ med sentrum i origo, se Figur 3.



Figur 2: Figur til Oppgave 4.

4a (vekt 5 poeng)

Beskriv symmetrigruppen til figuren.

4a Løsning Sentrum i sirklene danner et regulært hekseader, og symmetrigruppen er derfor den dihedrale gruppen D_6 . Den består av rotasjoner i den sykliske rotasjonsgruppen

$$C_6 = \left\{ id, \rho_{\frac{\pi}{3}}, \rho_{\frac{2\pi}{3}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{4\pi}{3}}, \rho_{\frac{5\pi}{3}} \right\}$$

(Fortsettes på side 5.)

og i tillegg seks speilinger

$$\{s_{\ell_1}, s_{\ell_2}, s_{\ell_3}, s_{\ell_4}, s_{\ell_5}, s_{\ell_6}\}.$$

De seks speilingslinjene er gitt ved

$$\begin{aligned} \ell_1: y = 0 & \quad \ell_2: y = \frac{\sqrt{3}}{3}x & \quad \ell_3: y = \sqrt{3}x \\ \ell_4: x = 0 & \quad \ell_5: y = -\sqrt{3}x & \quad \ell_6: y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x. \end{aligned}$$

4b (vekt 10 poeng)

La ρ_θ være en rotasjon om origo med vinkel θ . Vis at

$$\rho_{(\theta_1+\theta_2)} = \rho_{\theta_1}\rho_{\theta_2}.$$

Forklar at undergruppen av rotasjoner til figuren er generert av $\rho_{\frac{\pi}{3}}$.

4b Løsning Standardmatrisen til ρ_θ er

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Ved direkte utregning og bruk av summeformlene

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos(\theta_1 + \theta_2) &= \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

får vi

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 & -\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2 & \cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

og resultatet følger.

Alle elementer i C_6 kan skrives som $\rho_{\frac{k\pi}{3}}$ for et heltall k , og siden det følger fra det over at $\rho_{\frac{k\pi}{3}} = \rho_{\frac{\pi}{3}}^k$, vil $\rho_{\frac{\pi}{3}}$ generere undergruppen av rotasjoner til figuren.

4c (vekt 10 poeng)

La ℓ være symmetrilinja til figuren som danner vinkel $\frac{\pi}{3}$ med x -aksen i retning mot klokka, og la s_ℓ være speilingen om linja ℓ . Forklar at $s_\ell = \rho_{\frac{\pi}{3}} s \rho_{-\frac{\pi}{3}}$, der s er speilingen om x -aksen. Finn standardmatrisen til s_ℓ , og verifiser at s_ℓ er en orienteringsreverserende isometri.

(Fortsettes på side 6.)

4c Løsning Ved å rotere om origo med vinkel $-\frac{\pi}{3}$, vil linja ℓ roteres til x -aksen. Å speile om x -aksen fikserer x -aksen. Ved å rotere $\frac{\pi}{3}$ vil x -aksen avbildes tilbake på ℓ , som betyr at ℓ er fikslinje for $\rho_{\frac{\pi}{3}} s \rho_{-\frac{\pi}{3}}$. Sammensetningen $\rho_{\frac{\pi}{3}} s \rho_{-\frac{\pi}{3}}$ er en orienteringsreverserende isometri fordi den består av to orienteringsbevarende og en orienteringsreverserende isometri. En orienteringsreverserende isometri som fikserer ℓ er nettopp speilingen s_ℓ . Standardmatrisen til s er gitt ved

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Matrisemultiplikasjon gir

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(-\frac{\pi}{3}) & -\sin(-\frac{\pi}{3}) \\ \sin(-\frac{\pi}{3}) & \cos(-\frac{\pi}{3}) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{4} - \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

som altså er standardmatrisen til s_ℓ .

Regner vi determinanten til denne, finner vi

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -1,$$

som bekrefter at s_ℓ er en orienteringsreverserende isometri.

Oppgave 5 (vekt 30 poeng)

5a (vekt 10 poeng)

To linjer i det projektive planet $\mathbb{RP}^2$ er gitt ved

$$\ell_{-1}: 2x_0 + x_1 - x_2 = 0 \quad \text{og} \quad \ell_1: 2x_0 + x_1 + x_2 = 0.$$

Vis at $P = (1 : -2 : 0)$ er skjæringspunktet mellom ℓ_{-1} og ℓ_1 . Finn også likningen til linja gjennom punktene P og $Q = (2 : 1 : 0)$.

(Fortsettes på side 7.)

5a Løsning Vi regner på kryssproduktet mellom koeffisientvektorene til linjene og finner vektoren

$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= (2, 1, -1) \times (2, 1, 1) \\ &= (2, -4, 0).\end{aligned}$$

Punktet $P \in \mathbb{RP}^2$ med homogene koordinater er da

$$P = (2 : -4 : 0) \sim (1 : -2 : 0).$$

Alternativt kan man sjekke at likningene for begge linjene holder ved innsetting av koordinatene til P .

Likningen for linja gjennom P og Q finner vi ved å regne på determinanten

$$\ell_{PQ}: \begin{vmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5x_2 = 0.$$

Her kan det også observeres direkte at begge punkter ligger på linja $x_2 = 0$, så ved entydighet må det være likningen til linja mellom dem.

5b (vekt 10 poeng)

La $\mathcal{C}$ være kjeglesnittet i $\mathbb{R}^2$ gitt ved

$$5x^2 + 5y^2 = 1.$$

Finn likningene til tangentlinjene til dette kjeglesnittet i punktene $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ og $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$. Finn likningen til linja gjennom $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ og $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$, og vis at den står normalt på disse tangentlinjene.

5b Løsning Tangentlinja til $\mathcal{C}$ i et punkt med koordinater (x_p, y_p) er gitt ved

$$5x \cdot x_p + 5y \cdot y_p = 1.$$

Tangentlinja T_1 i punktet $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ er gitt ved

$$\begin{aligned}T_1: 5x \cdot \frac{2}{5} + 5y \cdot \frac{1}{5} &= 1 \\ 2x + y &= 1.\end{aligned}$$

Tangentlinja T_2 i punktet $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ er gitt ved

$$\begin{aligned}T_2: 5x \cdot (-\frac{2}{5}) + 5y \cdot (-\frac{1}{5}) &= 1 \\ -2x - y &= 1 \\ 2x + y &= -1.\end{aligned}$$

Linja ℓ gjennom $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ og $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ har stigningstall

$$k = \frac{(\frac{1}{5} - (-\frac{1}{5}))}{(\frac{2}{5} - (-\frac{2}{5}))} = \frac{1}{2},$$

(Fortsettes på side 8.)

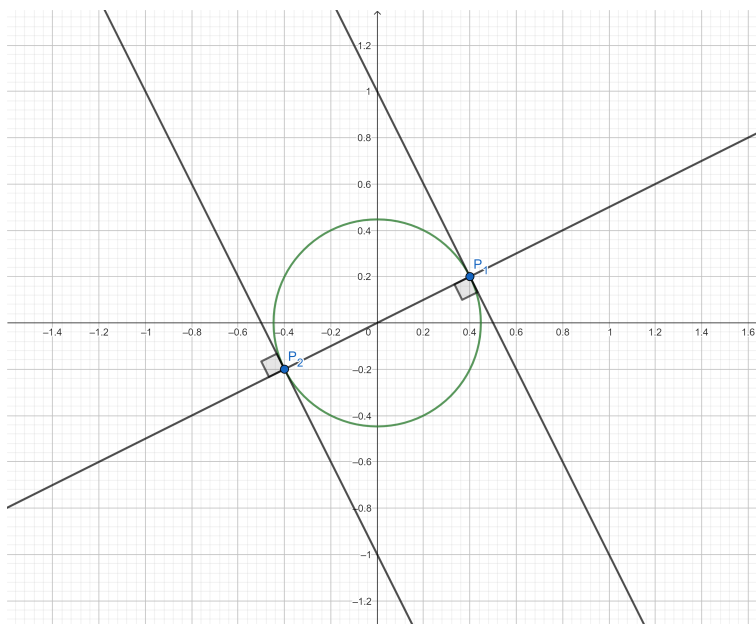
og, ved å bruke ett av punktene, likning

$$\ell: (y - \frac{1}{5}) = \frac{1}{2}(x - \frac{2}{5}),$$

som forenkles til

$$y = \frac{1}{2}x.$$

Linja ℓ står normalt på T_1 og T_2 fordi stigningstallene oppfyller $k' = -\frac{1}{k}$.



Figur 3: Figur til Oppgave 5.

5c (vekt 5 poeng)

Betrakt nå utvidelsen av kjeglesnittet $\mathcal{C}$ i $\mathbb{RP}^2$ med koordinater $(x_0 : x_1 : x_2)$ der $(x, y) = (\frac{x_0}{x_2}, \frac{x_1}{x_2})$ når $x_2 \neq 0$. Skriv likningen til dette kjeglesnittet, og bestem antall reelle snittpunkter mellom kjeglesnittet og linja ℓ_∞ gitt ved $x_2 = 0$.

5c Løsning Vi gjør substitusjonen og får

$$5x^2 + 5y^2 = 1 \tag{1}$$

$$5\left(\frac{x_0}{x_2}\right)^2 + 5\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 = 1 \tag{2}$$

$$5x_0^2 + 5x_1^2 = x_2^2. \tag{3}$$

Kjeglesnittet er altså gitt ved likningen $5x_0^2 + 5x_1^2 - x_2^2 = 0$ i $\mathbb{RP}^2$.

Vi regner diskriminanten $D = 0^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 < 0$, så det er ingen reelle snittpunkter mellom kjeglesnittet og ℓ_∞ .

(Fortsettes på side 9.)

5d (vekt 5 poeng)

Finn polen til polaren til $\mathcal{C}$ gitt ved $\frac{1}{2}x_0 - x_1 = 0$.

5d Løsning I det affine kartet der $x_2 \neq 0$ er polaren linja som skjærer $\mathcal{C}$ i punktene $(\frac{2}{5}, \frac{1}{5})$ og $(-\frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$. Tangentlinjene til $\mathcal{C}$ i disse punktene, T_1 og T_2 , er parallelle på det affine kartet, men utvidet til det projektive planet vil de være linjene ℓ_1 og ℓ_{-1} , som vi har sett skjærer hverandre i $P = (1 : -2 : 0)$. Dette punktet er dermed polen til polaren.

SLUTT