UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 3370 — Lineær optimering
Eksamensdag:	3. juni 2008
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Bare godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 9 spørsmål med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1

Betrakt LP problemet:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & -x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{forutsatt at} & & & & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. & & & \end{array} \tag{1}$$

1a

Løs problemet (1) ved simpleksalgoritmen med startløsning $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Finn en optimal løsning og tilhørende optimal verdi.

1b

Illustrer problemet (1) geometrisk i planet: tegn det tillatte området og nivåkurven til objektivfunksjonen $f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$ i den optimale løsningen.

1c

Er det entydig optimal løsning av (1)? Begrunn svaret. Finn også en optimal duralløsning (dvs. optimal løsning av det duale til (1)).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Betrakt følgende LP problem gitt ved basislisten (dictionary):

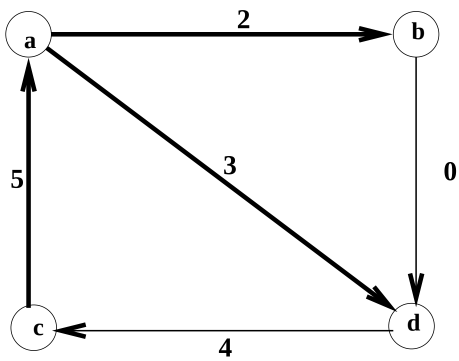
$$\begin{array}{rrrrrrr} \zeta = & 10 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\ \hline x_4 = & -1 & & & + & x_2 & - & 4x_3 \\ x_5 = & 2 & - & x_1 & + & x_2 & & \\ x_6 = & 0 & + & 3x_1 & & & - & x_3 \end{array} \tag{2}$$

2a

Løs problemet (2) ved den duale simpleksalgoritmen og angi optimal løsning og optimal verdi.

Oppgave 3

Vi har et nettverk strøm problem i følgende rettede graf med noder (hjørner) a, b, c, d:



Tallene langs kantene angir kostnad c, og de uthevede kantene (a, b), (a, d) og (c, a) gir et spenntre som svarer til en viss basis i problemet.

3a

Beregn den tilhørende *duale* basisløsningen (y og z) der vi lar $y_d = 0$. Er dette en optimal basis? Begrunn svaret.

3b

Hva kan du si generelt om determinanten til en LP basis matrise i et nettverk strøm problem?

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4

La $c_1, c_2, \ldots, c_n$ være gitte reelle tall, og definer funksjonen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

der $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La A være en $m \times n$ matrise og $b \in \mathbb{R}^m$. Betrakt minimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{forutsatt at} & \\ & Ax \leq b. \end{array} \tag{3}$$

4a

Skriv (3) som et LP problem, og gi en kort forklaring av konstruksjonen.

4b

Vis at funksjonen f er konveks.

4c

La nå $P \subseteq \mathbb{R}^n$ være en polytop. Vis at det finnes en optimal løsning x^* av problemet

$$\max\{f(x) : x \in P\}$$

der x^* er et ekstrempunkt for P.

Lykke til!