UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF-MAT 3370 — Lineær optimering
Eksamensdag:	3. juni 2008
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Bare godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgavesettet består av 9 spørsmål med tilnærmet samme vekt.

Oppgave 1

Betrakt LP problemet:

$$\begin{array}{llcrcl} \text{max} & -x_1 & + & 2x_2 & & \\ \text{forutsatt at} & & & & & \\ & -x_1 & + & x_2 & \leq & 3 \\ & x_1 & & & \leq & 5 \\ & & & x_2 & \leq & 5 \\ & & x_1, x_2 \geq 0. & & & \end{array} \tag{1}$$

1a

Løs problemet (1) ved simpleksalgoritmen med startløsning $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Finn en optimal løsning og tilhørende optimal verdi.

Løsning:

$$\begin{array}{rcccccc} \zeta = & 0 & - & x_1 & + & 2x_2 \\ \hline w_1 = & 3 & + & x_1 & - & x_2 \\ w_2 = & 5 & - & x_1 & & \\ w_3 = & 5 & & & - & x_2 \end{array}$$

Pivoterer x_2 inn og w_1 ut:

$$\begin{array}{rcccccc} \zeta = & 6 & + & x_1 & - & 2w_1 \\ \hline x_2 = & 3 & + & x_1 & - & w_1 \\ w_2 = & 5 & - & x_1 & & \\ w_3 = & 2 & - & x_1 & + & w_1 \end{array}$$

(Fortsettes på side 2.)

Pivoterer x_1 inn og w_3 ut:

$$\begin{array}{rrcrcr}
\zeta = & 8 & - & w_3 & - & w_1 \\
\hline
x_2 = & 5 & - & w_3 & & \\
w_2 = & 3 & + & w_3 & - & w_1 \\
x_1 = & 2 & - & w_3 & + & w_1
\end{array}$$

Optimal løsning: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$ (og $w_1 = w_3 = 0$, $w_2 = 3$); optimal verdi er 8.

1b

Illustrer problemet (1) geometrisk i planet: tegn det tillatte området og nivåkurven til objektivfunksjonen $f(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2$ i den optimale løsningen.

Løsning: Geometrisk: kvadratet $[0,5] \times [0,5]$ der en trekant er fjernet i øvre venstre hjørne; gir kant mellom hjørnene $(0,3)$ og $(2,5)$. Nivåkurven er en rett linje med normalvektor $(-1,2)$ som går gjennom $(2,5)$.

1c

Er det entydig optimal løsning av (1)? Begrunn svaret. Finn også en optimal dualløsning (dvs. optimal løsning av det duale til (1)).

Løsning: Ja, entydig fordi duale basisvariable begge er positive (så enhver endring gir lavere verdi på obj.funk.). Optimal dual basisløsning er $y_5 = 1$ (svarer til w_3), $y_3 = 1$ (svarer til w_1), mens de øvrige y_i-ene er 0.

Oppgave 2

Betrakt følgende LP problem gitt ved basislisten (dictionary):

$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\zeta = & 10 & - & x_1 & - & x_2 & - & 2x_3 \\
\hline
x_4 = & -1 & & & + & x_2 & - & 4x_3 \\
x_5 = & 2 & - & x_1 & + & x_2 & & \\
x_6 = & 0 & + & 3x_1 & & & - & x_3
\end{array} \tag{2}$$

2a

Løs problemet (2) ved den duale simpleksalgoritmen og angi optimal løsning og optimal verdi.

Løsning: Pivoter i første rad: x_4 ut, og x_2 inn i basis. Får:

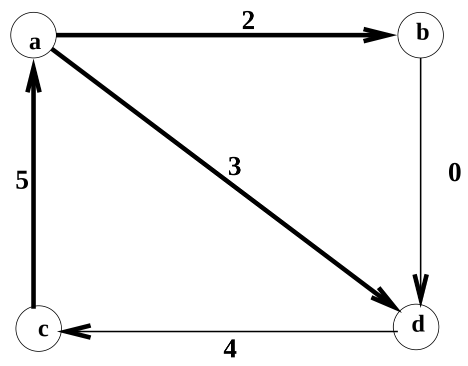
$$\begin{array}{rrcrcrcr}
\zeta = & 9 & - & x_1 & - & x_4 & - & 6x_3 \\
\hline
x_2 = & 1 & & & + & x_4 & + & 4x_3 \\
x_5 = & 3 & - & x_1 & + & x_4 & + & 4x_3 \\
x_6 = & 0 & + & 3x_1 & & & - & x_3
\end{array}$$

(Fortsettes på side 3.)

Så: optimal løsning er $x_2 = 1, x_5 = 3$ *og de andre variablene er 0. Optimal verdi er 9.*

Oppgave 3

Vi har et nettverk strøm problem i følgende rettede graf med noder (hjørner) a, b, c, d:



Tallene langs kantene angir kostnad c, og de uthevede kantene (a, b), (a, d) og (c, a) gir et spenntre som svarer til en viss basis i problemet.

3a

Beregn den tilhørende *duale* basisløsningen (y og z) der vi lar $y_d = 0$. Er dette en optimal basis? Begrunn svaret.

Løsning: Får $y_a = -3$, $y_b = -1$, $y_c = -8$, $y_d = 0$, *og* $z_{dc} = 12$, $z_{bd} = -1$. *Siden* $z_{bd} = -1 < 0$, *er ikke basisen optimal.*

3b

Hva kan du si generelt om determinanten til en LP basis matrise i et nettverk strøm problem?

Løsning: Enhver LP basis matrise (i et nettverk strøm problem) vil, etter passende permutasjon av rader og kolonner være triangulær med ± 1 *på diagonalen, så determinanten (som blir produktet av disse diagonalelementene) er* 1 *eller* -1.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 4

La $c_1, c_2, \ldots, c_n$ være gitte reelle tall, og definer funksjonen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

der $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La A være en $m \times n$ matrise og $b \in \mathbb{R}^m$. Betrakt minimeringsproblemet

$$\begin{array}{ll} \text{min} & f(x) \\ \text{forutsatt at} & \\ & Ax \leq b. \end{array} \tag{3}$$

4a

Skriv (3) som et LP problem, og gi en kort forklaring av konstruksjonen.

Løsning:

$$\begin{array}{llll} \text{min} & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=1}^{n} z_j & & \\ \text{forutsatt at} & & & \\ & & Ax \leq b & \\ & & x_j \leq z_j & (j \leq n) \\ & & -x_j \leq z_j & (j \leq n) \end{array}$$

I enhver tillatt løsning er $|x_j| \leq z_j$ $(j \leq n)$, og i enhver optimal løsning må $z_j = |x_j|$ $(j \leq n)$ som gir ekvivalensen.

4b

Vis at funksjonen f er konveks.

Løsning: Kan vises direkte fra definisjonen av konveks funksjon (ved bruk av trekantulikheten) eller ut fra at f er sum av konvekse funksjoner og derfor konveks.

4c

La nå $P \subseteq \mathbb{R}^n$ være en polytop. Vis at det finnes en optimal løsning x^* av problemet

$$\max\{f(x) : x \in P\}$$

der x^* er et ekstrempunkt for P.

Løsning: f er kontinuerlig og P er lukket og begrenset (fra polyederteori: se heftet), så ved ekstremverditeoremet finnes et maksimumspunkt for f over P. Fra konveksitet har vi et teorem som sier at P, idet P er en polytop,

(Fortsettes på side 5.)

er den konvekse innhylningen av et endelig antall punkter $v_1, v_2, \ldots, v_t$. *Kan anta at disse punktene er ekstrempunkter (de som ikke er det er konveks kombinasjoner av de andre, og kan derfor fjernes). Ethvert punkt* $x \in P$ *kan derfor skrives som en konveks kombinasjon* $x = \sum_j \lambda_j v_j$ *der* $\lambda_j \geq 0$ $(j \leq t)$ *og* $\sum_j \lambda_j = 1$. *Dermed gir konveksitet av funksjonen* f *at*

$$f(x) = f(\sum_j \lambda_j v_j) \leq \sum_j \lambda_j f(v_j) \leq M \sum_j \lambda_j = M$$

der $M = \max_j f(v_j)$. *Men da finnes en* j *slik at* $f(v_j) = M$ *og ekstrempunktet* $x^* := v_j$ *må være en optimal løsning av optimeringsproblemet.*