Ex. 11.3

Let $\vec{y}$ be a randomized strategy for R_1 and $\vec{x}$ for K. minmax theorem says that

$$\min_y \vec{y}^T A\vec{x} \le \max_x \min_y \vec{y}^T A\vec{x} = \min_y \max_x \vec{y}^T A\vec{x} \le \max_x \vec{y}^T A\vec{x}$$

$$\min_y \vec{y}^T A\vec{x}^* \qquad \max_x (\vec{y}^*)^T A\vec{x}$$

ifequality: $\vec{x}$ optimal

ifequality: $\vec{y}$ optimal

La r være slik at radr i A dominerer en annen rad (ϵ).

Let y' være strategien der

$$y'_r = 0$$

$$y'_\epsilon = y^*_\epsilon + y^*_r$$

$$y'_s = y^*_s \qquad s \neq r, \epsilon$$

y' er også feasible. For enhver feasible x har vi

$$(y')^T Ax = \sum_j \Big(\sum_{i \neq r,\epsilon} y^*_i a_{ij} x_j + \underbrace{y'_r a_{rj} x_j}_{0} + y'_\epsilon a_{\epsilon j} x_j \Big)$$

$$= \sum_j \Big(\sum_{i \neq r,\epsilon} y^*_i a_{ij} x_j + (y^*_\epsilon + y^*_r) a_{\epsilon j} x_j \Big)$$

$$= \sum_j \Big(\sum_{i \neq r,\epsilon} y^*_i a_{ij} x_j + y^*_r a_{\epsilon j} x_j + y^*_\epsilon a_{\epsilon j} x_j \Big)$$

radr dominerer radt:

$$\le \sum_j \Big(\sum_{i \neq r,\epsilon} y^*_i a_{ij} x_j + y^*_r a_{rj} x_j + y^*_\epsilon a_{\epsilon j} x_j \Big)$$

$$= (y^*)^T A\vec{x}$$

Det følger nå: $\max_x (y')^T Ax \le \max_x (y^*)^T A\vec{x}$

b) La s være slik at søyle s domineres av en annen søyle (t).
La x' være strategien der

$$x'_s = 0$$
$$x'_t = x^*_t + x^*_s$$
$$x'_r = x^*_r \quad r \neq s, t$$

x' er også feasible. Vi har at

$$y^T A x' = \sum_i \Big(\sum_{j \neq s,t} y_i a_{ij} x^*_j + \underbrace{y_i a_{is} x'_s}_{0} + y_i a_{it} x'_t \Big)$$
$$= \vdots$$
$$\geq \sum_i \Big(\sum_{j \neq s,t} y_i a_{ij} x^*_j + y_i a_{it} x^*_t + y_i a_{is} x^*_s \Big)$$
$$= y^T A x^*$$

Det følger at $\min_y y^T A x' \geq \min_y y^T A x^*$, slik at x' også er optimal

Oppsummert: Hvis rad r dominerer en annen rad: Da kan du anta at $y^*_r = 0$
(fjern rad r fra A)

Hvis søyle s domineres av en annen søyle:
Vi kan da anta at $y^*_s = 0$.
(fjern søyle s fra A).

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -7 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & -9 & -1 \\ -7 & 3 & -3 & -8 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

søyle 4 domineres av søyle 5
$\Rightarrow$ fjern søyle 4

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & -2 & -1 \\ -7 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

rad 2 dominerer rad 1
$\Rightarrow$ fjern rad 2

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 & -4 & -5 \\ -7 & 3 & -3 & -2 \\ 2 & -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

søyle 1 dominerer av søyle 3

$\Rightarrow$ fjern søyle 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ 3 & -3 & -2 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

rad 2 dominerer rad 1

$\Rightarrow$ fjern rad 2

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & -5 \\ -3 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

søyle 3 dominerer av søyle 2

$\Rightarrow$ fjern søyle 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Vi kan ikke fjerne flere rader/søyler.

Anta x^*, y^* er optimale strategier for denne 2×2 payoff-matrisen

rader vi har slettet: 2, 3 $\Rightarrow$ $y' = (y_1^*, 0, 0, y_2^*)$

søylene vi har slettet: 4, 1, 5 $\Rightarrow$ $x' = (0, x_1^*, x_2^*, 0, 0)$

Ex 11.2

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & \cdots \\ -1 & 0 & 1 & & -1 & \\ 1 & -1 & 0 & 1 & & \\ 1 & & -1 & 0 & 1 & \\ & 1 & & -1 & 0 & \\ & & 1 & & 1 & \ddots \end{pmatrix}$$

A velger i $\in R$

B velger j $\in K$

A vinner: $a_{ij} = -1$

B vinner $a_{ij} = 1$

ellers: $a_{ij} = 0$

Vi har at rad 4, 5, 6, ... dominerer rad 1, slik at disse kan slettes

øvre 4×4:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da får vi:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & \dots \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -1 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & \dots \end{pmatrix}$$

Vi ser at søyle 4, 5, 6, ... domineres av søyle 1, slik at disse også kan fjernes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$ som er payoff-matrisen for stein/saks/papir, der $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ er optimalt.

For matrisen vi startet med blir $y^* = x^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Bevis for at $\hat{x} = \hat{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ er unikt optimum for stein/saks/papir.

Optimalt:

$$\max_x \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{(y^*)^T} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \max_x 0 = 0$$

$$\min_y \vec{y}^T \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}}_{x^*} = \min_y 0 = 0$$

Siden $\min_y y^T A \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \leq \max_x \min_y y^T A x \leq \min_x \max_y y^T A x \leq \max_x \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} A \vec{x}$

Det følger at $x^* = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) = y^*$ er optimal for K/R.

Unikhet: $\max_x \min_y y^T A x = \max_x \min_y [y_1\ y_2\ y_3] \begin{bmatrix} x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$

$= \max_x \min_y\ y_1(x_2 - x_3) + y_2(x_3 - x_1) + y_3(x_1 - x_2)$

Vi får min her når $y_i = 1$ for i'en som får $\min(x_2 - x_3, x_3 - x_1, x_1 - x_2)$

Dette er ≤ 0, siden for tre tall som summerer seg til 0, så må et av dem være ≤ 0

Vi får dette til å bli 0 ved å sette $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ i som gir det unike maksimumet

Ex 11.6

Ved minmax-teoremet

$\min_y y^T A x \leq y^T A x$

$\max_x \min_y y^T A x \leq \max_x y^T A x$

$\max_x \min_y y^T A x \leq \min_y \max_x y^T A x$

$\min_y y^T A x^* \leq \max_x \min_y y^T A x \leq \min_y \max_x y^T A x \leq \max_x (y^*)^T A x$

Like p.g.a. minmax teoremet