PRØVEEKSAMEN MAT 2250 VÅR 2022

Oppgave 1

La $G = (H, K)$ være en graf med $|H| \times |K|$ insidens matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Tegn grafen G og skriv opp $|H| \times |H|$ nabomatrisen til G.
b) Er grafen G Eulersk eller Hamiltonsk? Begrunn svaret.
c) Finn en korteste sykel gjennom alle kantene (det er mulig du må bruke samme kant flere ganger).

Oppgave 2

a) Hva er Stirlingtallet av $s(n, k)$ av første type, og Stirlingtallet $S(n, k)$ av andre type? Forklar hvorfor $S(n, k) \leq s(n, k)$. For hvilke n, k er $S(n, k) = s(n, k)$? Begrunn svaret.
b) Vis rekursjonen

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}, \quad (n, k > 0)$$

c) Vis rekursjonen

$$S_{n+1,k+1} = \Sigma_{i=k}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$$

Oppgave 3

Et t-design S, U med parametre (v, k, λ) består av en v-mengde S (i.e. $|S| = v$) og en mengde U av k-delmengder A av S, slik at hver t-delmengde i S er inneholdt i nøyaktig λ delmengder $A \in U$.
a) Hvor mange 3-delmengder er det i et 2-design med parametre $(v, k, \lambda) = (7, 3, 2)$? Begrunn svaret
b) Finn et 2-design med parametre $(5, 3, 3)$, og en λ slik at det fins et 1-design med parametre $(5, 2, \lambda)$.

Oppgave 4

La $C \subset \{0,1\}^8$ være den lineære koden med generator-matrise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn paritetsjekk-matrisen til koden C.
b) Hva er minimumsavstanden til C? Hva er største t slik at C oppdager t feil, og største t slik at C retter t feil?
c) For hvert element $v \in \{0,1\}^8$, la

$$d_C(v) = min\{d(v, u) | u \in C\},$$

der $d(v, u)$ er Hammingavstanden mellom u og v. Finn

$$max\{d_C(v) | v \in \{0,1\}^8\}?$$