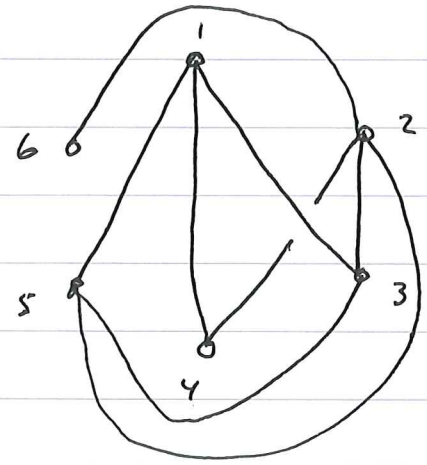
PRØVEEKSAMEN MAT 2250 VÅR 2022

LØSNINGSFORSLAG

(1)

a)

G:



Nabomatrise

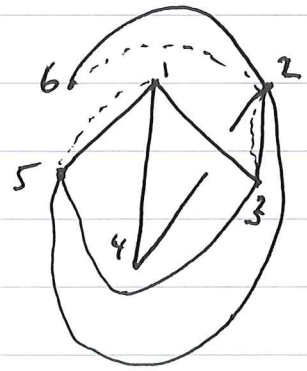
	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1	0
4	1	1	0	0	0	0
5	1	1	1	0	0	0
6	0	1	0	0	0	0

b) En graf er Eulersk om den er sammenhengende og hvert hjørne har jevn grad.

Hjørne "6" har grad en, ikke jevnt, så G er ikke Eulersk.

Siden "6" har grad en, har G ingen Hamiltonsk sykel, en sykel som er innom alle hjørner må være innom "2" to ganger.

c)



EKSTRA KANTER MELLOM "ODDE" HJØRNER:

1 3 5 6

KORTESTE SYKEL GJENNOM ALLE KANTER:

1 3 2 6 2 5 1 5 3 2 4 1

(2)

a) $S(n,k)$: Antall permutasjoner av en n-mengde med k disjunkte sykler.

$\left\{ n \atop k \right\}$: Antall partisjoner av en n-mengde i k disjunkte delmengder.

Hver permutasjon med k sykler bestemmer en partisjon med k disjunkte delmengder, og hver slik partisjon bestemmer minst en slik permutasjon så

$$\left\{ n \atop k \right\} \leq s(n,k).$$

$\left\{ n \atop k \right\} = s(n,k)$ hvis og bare hvis antall sykler på hver delmengde er en, det vil si hver delmengde har ett eller to elementer. ✓

② a fortsettelse:

partisjonene av en n-mengde i k delmengder inneholder bare delmengder med *ett* eller *to* elementer dersom det er mulig med høyst *en* delmengde med to elementer, det vil si

$$k = n-1 \quad \text{eller} \quad k = n.$$

Så

$$s(n,k) = S(n,k) \iff k = n-1 \text{ eller } k = n \qquad (n,k \geq 1).$$

b) $$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k} \qquad (n,k > 0)$$

$\#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n\}$ i k delmengder$\}$

$= \#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n\}$ i k delmengder, slik at $\{n\}$ er en av delmengdene$\}$

$=$

$\#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n-1\}$ i $k-1$ delmengder$\}$ + $\#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n\}$ i k delmengder, slik at $\{n\}$ *ikke* er en av delmengdene$\}$

$=$

$k \cdot \#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n-1\}$ i k delmengder$\}$

$$\left(S_{n,k} = S(n,k) \right)$$

c) Vil vise

$$S_{n+1,k+1} = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} S_{i,k}$$

$\#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n+1\}$ i $k+1$ delmengder$\}$

$= \#\{$partisjoner av $\{1,\dots,n+1\}$ i $k+1$ delmengder, der $n+1$ er i en delmengde med $n-i$ andre elementer$\}_{i=k,k+1,\dots,n}$

$= \#\{$delmengder av $\{1,\dots,n\}$ med $n-i$ elementer$\} \cdot \#\{$partisjoner av en i-mengde i k delmengder$\}_{i=k,\dots,n}$

$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$

$= S_{i,k}$.

□

(3)

a) skal vise at det finns et 2-design med parametre $(7,3,2)$.

La $\mathcal{U}$ være en mengde 3-delmengder av $\{1,2,\dots,7\}$.

La I være insidensen

$$I = \{ (A,B) \mid A \text{ er en 2-mengde i } \{1,2,\dots,7\}, B \in \mathcal{U} \}$$

$\#\{2\text{-mengder i } \{1,2,\dots,7\} = \binom{7}{2} = 21$, hver 2-mengde er i to mengder $B \in \mathcal{U}$, så $\#I = 2 \cdot 21 = \underline{42}$

Hver delmengde B inneholder 3 2-delmengder

så $\#\mathcal{U} = 42 : 3 = \underline{\underline{14}}$

③ b)

Et 2-design med parametre $(5,3,3)$:

$\mathcal{U}$ = alle 3-delmengder av $\{1,2,\ldots,5\}$

Et 1-design med parametre $(5,2,\lambda)$:

Hvert element i $\{1,2,\ldots,5\}$ er inneholdt i λ delmengder i $\mathcal{U}$; 8

Hvis $\mathcal{U}$ er alle 2-delmengder, så er hvert ~~element~~ element med i 4 2-delmengder:

så $\lambda = 4$ gir et 1-design med parametre $(5,2,4)$

④ a)

$C \leq \{0,1\}^8$ med generator matrise

$$G = \begin{pmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

Paritetsjekk matrise: (5×8) matrise s.a $G \cdot H^t = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

eller også:

$$H = \begin{pmatrix} 1&1&1&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&1&1&1&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&1&0 \\ 1&1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}$$

b)

minimumsavstand = minste antall 1-ere i et kodeord.

Kodeordene i C er

$(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$	
$(1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0)$	A
$(0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0)$	B
$(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1)$	C
$(1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$	$A+B$
$(0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1)$	$A+C$
$(1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)$	$B+C$
$(0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 1)$	$A+B+C$

så minimumsavstand er 4!

C oppdager 3 feil $(3 < 4)$

C retter $\underline{1}$ feil. $(1 < \frac{4}{2})$

c) $v \in \{0,1\}^8$. $d_0 = \max\{d_C(v) \mid v \in \{0,1\}^8\}$ =

minste d slik at $d(v,u) \le d$ for en $u \in C$, for hver v.

$\#\{0,1\}^8 = 2^8 = 256$

La $B_d(u) = \{v \in \{0,1\}^8 \mid d(v,u) \le d\}$

$\#B_d(u)$ er uavhengig av u, og $\#B_2(0,0\ldots0) = 1+8+\binom{8}{2} = \underline{37}$

$\#B_1(0,\ldots0) = 9$.

$$\underline{d_0} = \min\{d \mid \bigcup_{u\in C} B_d(u) = \{0,1\}^8\}$$

$$= \min\{d \mid \sum_{u\in C} |B_d(u)| \ge 256\} = \min\{d \mid 8\cdot|B_2(0,0\ldots0)| \ge 256\}$$

$$\underline{= 2} \qquad (8\cdot 37 = 296 > 256)$$