UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	INF-MAT3360 — Partielle Differensialligninger
Eksamensdag:	11. Juni 2007.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Definer følgende mengder

$$
\begin{aligned}
R &= \{(x,t) : 0 < x < 1 \quad \text{and} \quad 0 < t \leq T\} \\
B &= \{(x,t) : x = 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) : x = 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq t \leq T\} \\
&\cup \{(x,t) : t = 0 \quad \text{and} \quad 0 \leq x \leq 1\}
\end{aligned} \tag{1}
$$

Oppgave 1.

Betrakt varmelikningen med Neumann randbetingelser,

$$
\begin{aligned}
u_t - u_{xx} &= 0, && \text{for alle} \quad (x,t) \in R \\
u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0, && \text{for alle} \quad t \in (0,T] \\
u(x,0) &= f(x), && \text{for alle} \quad x \in [0,1].
\end{aligned} \tag{2}
$$

(i.) Finn da den eksplisitte løsningen $u(x,t)$ til (2) ved å bruke Fourier-metoden når initialfunksjonen f er gitt ved

$$f(x) = 6 + 4cos(3\pi x) + 293cos(7\pi x)$$

(ii.) Finn da den eksplisitte løsningen $u(x,t)$ til (2) ved å bruke Fourier-metoden når initialfunksjonen f er gitt ved

$$f(x) = x$$

(Fortsettes side 2.)

Tips: Du kan bruke disse integralresultatene

$$\int_0^1 x\ dx = \frac{1}{2}, \quad \int_0^1 x cos(k\pi x)\ dx = \frac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Oppgave 2.

Betrakt varmelikningen med Neumann randbetingelser (2). Vi beskriver nå et standard eksplisitt endelig differanseskjema (Finitie Difference Scheme) for å tilnærme løsninger av (2) på et uniformt rutenett både i rom og tid, med romsteg Δx og tidssteg Δt. Sett

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

og la rompunktene være beskrevet ved $x_j = j\Delta x$ med $j = 0, 1, \dots, N+1$ og punktene i tid ved $t^m = m\Delta t$ med $m = 0, 1, \dots$. La $v_j^m \approx u(x_j, t^m)$ benevne de tilnærmede løsningene, da er skjemaet gitt ved

$$v_j^{m+1} = (1-2r)v_j^m + r(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) \quad \forall \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{3}$$

(i.) Hvordan finner vi v_0^m og v_{N+1}^m for alle $m = 1, 2, \dots$.

(ii.) Bevis ved å bruke Von-Neumann Stabilitet at skjemaet (3) er stabilt under betingelsen $2r \leq 1$.

(iii.) Skriv ned et implisitt skjema (implicit scheme) for å tilnærme (2) på rutenettet beskrevet ovenfor.

(iv.) Er det implisitte skjemaet ubetinget stabilt?

Oppgave 3.

Vi ser på følgende likning med Neumann randbetingelser

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= u, && \text{for alle} \quad (x,t) \in R \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0, && \text{for alle} \quad t \in (0,T] \\ u(x,0) &= f(x), && \text{for alle} \quad x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{4}$$

- Definer "Energien" til u som

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 u^2(x,t)\ dx$$

(Fortsettes side 3.)

Vis at "Energien" tilfredstiller følgende ulikhet

$$E(t) \leq E(0)e^{2t}, \quad \forall \quad t \in [0, T]$$

Tips: Du kan bruke Gronwalls ulikhet: La $w : [0, T] \to \mathbb{R}$ være en kontinuerlig og deriverbar funksjon som tilfredsstiller

$$w'(t) \leq cw(t), \quad \text{for alle} \quad t \in (0, T)$$

for en konstant c. Da er

$$w(t) \leq w(0)e^{ct} \quad \text{for alle} \quad t \in [0, T]$$

.

(ii.) Vis at hvis u og v er løsninger til (4), da er $u \equiv v$

Oppgave 4.

La mengdene R og B være definert som i (1). Vi ser på følgende differensialulikhet

$$v_t + v_x < v_{xx}, \quad \forall \quad (x, t) \in R. \tag{5}$$

(i.) Vis at da oppfyller v følgende maksimumsprinsipp

$$\max_{(x,t)\in\bar{R}} v(x, t) \leq \max_{(x,t)\in B} v(x, t)$$

Oppgave 5.

Vi ser på bølgelikningen med Dirichlet randbetingelser,

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{for alle} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(1, t) &= 0, && \text{for alle} \quad t > 0 \\ u(x, 0) &= f(x), && \text{for alle} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ u_t(x, 0) &= g(x), && \text{for alle} \quad 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \tag{6}$$

(i.) Finn den eksplisitte løsningen u til (6) når initialfunksjonene er gitt ved

$$f(x) = 2sin(2\pi x), \quad g(x) = -3sin(4\pi x)$$

(ii.) Skriv ned et eksplisitt endelig differanseskjema (Finite Difference Scheme) for å løse (6)

(iii.) Gi betingelser som sikrer at det endelige differanseskjemaet er stabilt.

SLUTT