UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	INF-MAT3360 — Partial Differential Equations
Eksamensdag:	10. juni 2008.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

La $T > 0$ og definer følgende mengder:

$$R = \{(x,t) : 0 < x < 1 \quad \text{og} \quad 0 < t \le T\}$$
$$B = \{(x,t) : x = 0 \quad \text{og} \quad 0 \le t \le T\} \cup \{(x,t) : x = 1 \quad \text{og} \quad 0 \le t \le T\}$$
$$\cup \{(x,t) : t = 0 \quad \text{og} \quad 0 \le x \le 1\}$$

Oppgave 1.

Betrakt følgende varmelikning:

$$\begin{aligned} u_t + c(x)u_x - u_{xx} &= w(x,t), &&\text{for alle} \quad (x,t) \in R \\ u(0,t) = u_x(1,t) &= 0, &&\text{for alle} \quad t \in (0,T] \\ u(x,0) &= f(x), &&\text{for alle} \quad x \in [0,1] \end{aligned} \tag{1}$$

der f, w, c er glatte funksjoner.

(i.) Anta at $w(x,t) < 0$ for alle $(x,t) \in R$, og at u er en glatt løsning av (1). Vis at

$$\max_{(x,t)\in\bar{R}} u(x,t) \le \max_{x\in B} u(x,t).$$

(Fortsettes side 2.)

(ii.) Anta at $c \equiv 0$ og $w \equiv 0$.

Vi er gitt et endelig differanseskjema some approksimerer løsningen av (1) på et uniformt gitter med gitterlengde Δx og tidssteg Δt. Definer

$$r = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

La gitterpunktene være gitt ved $x_j = j\Delta x$ for $j = 0, 1, \ldots, N+1$, og tidsstegene ved $t^m = m\Delta t$ for $m = 0, 1, \ldots$. La $v_j^m \approx u(x_j, t^m)$ være den numeriske løsningen. Differanseskjemaet er gitt ved

$$v_j^{m+1} = (1-2r)v_j^m + r(v_{j+1}^m + v_{j-1}^m) \quad \forall \quad j = 1, 2, \ldots, N. \tag{2}$$

Hvordan finner vi v_0^m og v_{N+1}^m for $m = 1, 2, \ldots$?

(iii.) Utled en betingelse på r slik at

$$\min_{0 \le k \le N+1} v_k^0 \le v_j^m \le \max_{0 \le k \le N+1} v_k^0$$

for alle m, j.

(iii.) Skriv ned et implisitt skjema som løser (1) med samme gitterpunkter som over.

(iv.) Vis at det implisitte skjemaet alltid er stabilt, enten med Von Neumanns stabilitetsanalyse eller diskrete maksimumprinsipper.

Oppgave 2.

Betrakt følgende bølgelikning med Von Neumann-randbetingelser:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && \text{for alle} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) &= 0, && \text{for alle} \quad t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && \text{for alle} \quad 0 \le x \le 1 \\ u_t(x,0) &= g(x), && \text{for alle} \quad 0 \le x \le 1 \end{aligned} \tag{3}$$

(i.) Vi er gitt initialbetingelser

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\cos(3\pi x) + 4\cos(5\pi x), \\ g(x) &= 0. \end{aligned}$$

Finn en eksplisitt løsning av (3) med disse initialbetingelsene med fouriermetoden.

(Fortsettes side 3.)

(ii.) Vi definerer energien til en løsning $u(x,t)$ av (3) med generelle initialbetingelser f og g som

$$E(t) = \int_0^1 u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)dx.$$

Vis at $E(t) \leq E(0)$.

(iii.) Vis at løsningen av (3) er unik.

(iv). Skriv ned et eksplisitt differanseskjema til å approksimere løsningen av (3). Bruk et uniformt gitter.

(v.) Under hvilke betingelser er dette skjemaet stabilt?

SLUTT