UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	INF-MAT3360 — Partial Differential Equations
Eksamensdag:	09. juni 2009.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Betrakt følgende varmelikning:

$$\begin{aligned} u_t = u_{xx} - u, &\quad \text{for alle} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\ u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0, &\quad \text{for alle} \quad t \in (0,T], \\ u(x,0) = f(x), &\quad \text{for alle} \quad x \in [0,1]. \end{aligned} \tag{1}$$

(i.) Vis at hvis u og v er løsninger av (1), da er $u \equiv v$ *Tips: Bruk energi metoden.*

(ii.) Skriv ned et implisitt differanseskjema for å approksimere løsningen av (1).

(iii.) Vis at det implisitte skjemaet er ubetinget stabilt. Bruk Von Neumanns stabilitetsanalyse.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

Betrakt følgende varmelikning:

$$
\begin{aligned}
u_t = u_{xx} - u^2, &\quad \text{for alle} \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,T], \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, &\quad \text{for alle} \quad t \in (0,T], \\
u(x,0) = f(x), &\quad \text{for alle} \quad x \in [0,1].
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(i.) Skriv ned et eksplisitt differanseskjema for å approksimere løsningen av (2).

(ii.) La $v_j^m \approx u(x_j, t^m)$ benevne de tilnærmede løsningene. Finn en betingelse til å vise følgende diskrete maksimumprinsipp:

$$v_j^{m+1} \leq \max\{v_{j-1}^m, v_j^m, v_{j+1}^m\}.$$

Oppgave 3.

Betrakt følgende bølgelikning med Dirichlet randbetingelser:

$$
\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} = 0, &\quad \text{for alle} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \\
u(0,t) = u(1,t) = 0, &\quad \text{for alle} \quad t > 0, \\
u(x,0) = f(x), &\quad \text{for alle} \quad 0 \leq x \leq 1, \\
u_t(x,0) = g(x), &\quad \text{for alle} \quad 0 \leq x \leq 1,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

(i.) Finn den eksplisitte løsningen u til (3) når initialfunksjonene er gitt ved

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 14\sin(31\pi x) + 73\sin(52\pi x), \\
g(x) &= 45\sin(31\pi x) + 132\sin(44\pi x).
\end{aligned}
$$

(ii.) Vis at hvis u og v er løsninger av (1), så er $u \equiv v$ *Tips: Bruk energi metoden med energien:*

$$E(t) = \int_0^1 u_t^2(x,t) + u_x^2(x,t)dx.$$

(iii.) Skriv ned et eksplisitt differanseskjema til å approksimere løsningen av (3).

SLUTT