UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MA-IN 226 — Partielle differensiallikninger
Eksamensdag:	5. juni 2001
Tid for eksamen:	9.00–15.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

I denne oppgaven skal vi studere følgende initial- og randverdiproblem:

$$u_{tt} = u_{xx}, \qquad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = a, \quad u(1,t) = b, \qquad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad x \in (0,1). \tag{3}$$

Her er $a, b \in \mathbb{R}$ gitte konstanter og funksjonen f er gitt ved en Fourier sinusrekke på formen

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\pi x).$$

1-a

Vis at $u(x,t) = (b-a)x + a$ tilfredsstiller (1)–(2).

1-b

Finn en formell løsning av problemet (1)–(3).

Oppgave 2

I denne oppgaven vil Ω betegne enhetsdisken

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 < 1\},$$

(Fortsettes på side 2.)

mens $\partial\Omega$ er randa til Ω gitt ved

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\}.$$

2-a

Betrakt randverdiproblemet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{i } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{på } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{4}$$

hvor $f(x,y) = x^2 + y^2$. Finn en løsning til problemet som er rotasjonsinvariant, dvs. en løsning på formen $u(x,y) = U(r)$, hvor $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Finnes det flere løsninger til problemet (4)? Begrunn svaret.

2-b

Løs randverdiproblemet

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{i } \Omega, \\ u &= x^2 \quad \text{på } \partial\Omega. \end{aligned}$$

(Tips: Formelen $\cos^2(\alpha) = (1 + \cos(2\alpha))/2$ kan være nyttig.)

Oppgave 3

La $f : [-1, 1] \mapsto \mathbb{R}$ være en stykkevis kontinuerlig funksjon med Fourier rekke

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x)).$$

La videre $F(x) = (f(x) + f(-x))/2$.

Vis at F er en like funksjon, og finn Fourier rekka til F.

Oppgave 4

I denne oppgaven skal vi studere følgende initial- og randverdiproblem:

$$\begin{aligned} u_t &= (a u_x)_x, & x \in (0,1),\ t > 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0 & t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), & x \in (0,1). \end{aligned} \tag{5}$$

I første del av oppgaven antar vi at a er en positiv konstant.

4-a

Bestem en formell løsning til problemet (5) uttrykt ved koeffisientene i Fourier cosinusrekka til f.

(Fortsettes på side 3.)

4-b

Anta at $u(\cdot, t)$ er stykkevis kontinuerlig for alle $t \geq 0$. Benytt den formelle løsningen og Parsevals identitet til å vise at

$$\int_0^1 (u(x,t) - f_0)^2 \, dx \leq e^{-2a\pi^2 t} \int_0^1 (f(x) - f_0)^2 \, dx \quad t \geq 0, \tag{6}$$

hvor konstanten f_0 betegner middelverdien av initialfunksjonen f, dvs.

$$f_0 = \int_0^1 f(x) \, dx.$$

Gi en grov skisse av funksjonen $u(x, 1000)$ når $a = 1$ og $f(x) = 1 + 50\pi \sin(25\pi x)$.

I resten av oppgaven antar vi at $a = a(x)$ er en glatt funksjon av x slik at $a(x) > 0$ for alle $x \in [0, 1]$.

4-c

Vis at alle glatte løsninger av (5) har egenskapen

$$\int_0^1 u(x,t) \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx = f_0 \quad t \geq 0. \tag{7}$$

En variant av Poincarés ulikhet uttrykker at hvis g er kontinuerlig deriverbar på intervallet $[0, 1]$, med middelverdi lik null, så gjelder ulikheten

$$\int_0^1 (g(x))^2 \, dx \leq \frac{1}{\pi^2} \int_0^1 (g'(x))^2 \, dx. \tag{8}$$

4-d

Benytt energiestimater og ulikheten (8) til å vise at alle glatte løsninger til initial- og randverdiproblemet (5) tilfredsstiller følgende generalisering av estimatet (6):

$$\int_0^1 (u(x,t) - f_0)^2 \, dx \leq e^{-2\alpha\pi^2 t} \int_0^1 (f(x) - f_0)^2 \, dx \quad t \geq 0,$$

hvor $\alpha = \min_{x \in [0,1]} a(x) > 0$.
(Tips: Sett $E(t) = \int_0^1 (u(x,t) - f_0)^2 \, dx$.)

4-e

Vis ulikheten (8).
(Tips: Betrakt Fourier rekka til den like utvidelsen av g.)
Forklar hvorfor ulikheten (8) ikke er riktig hvis vi ser bort fra antagelsen at middelverdien til g er null.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5

Et eksplisitt differensskjema for problemet (5), hvor $a = a(x)$, er gitt ved

$$\begin{aligned} \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} &= \frac{a_{j-1/2}v_{j-1}^m - (a_{j-1/2} + a_{j+1/2})v_j^m + a_{j+1/2}v_{j+1}^m}{(\Delta x)^2} && j = 1, 2, \ldots, n,\ m \geq 0, \\ v_1^m - v_0^m &= v_{n+1}^m - v_n^m = 0 && m \geq 0, \\ v_j^0 &= f(x_j), && j = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

Her er v_j^m en approksimasjon til $u(x_j, m\Delta t)$, $\Delta x = 1/(n+1)$, $x_j = j\Delta x$ og

$$a_{j+1/2} = \frac{a(x_{j+1}) + a(x_j)}{2}.$$

5-a

Vis at løsningene til differensskjemaet tilfredstiller

$$\sum_{j=1}^{n} v_j^m = \sum_{j=1}^{n} f(x_j), \qquad m \geq 0, \tag{9}$$

som er en diskret analog av (7).

5-b

Kan du slutte fra likheten (9) at det eksplisitte differensskjemaet alltid er stabilt? Begrunn svaret.

SLUTT