UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 3360 — Innføring i partielle differensialligninger
Eksamensdag:	Tirsdag, 10. juni, 2014
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

1-a

Løs varmeledningsproblemet

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{1}$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$
$$u(x,0) = \sin(\pi x) - 4\sin(3\pi x), \quad x \in (0,1). \tag{3}$$

1-b

Finn en formell løsning til problemet (1), (2), men med initialbetingelsen gitt ved

$$u(x,0) = x, \quad x \in (0,1).$$

1-c

Løs problemet (1), (3) , men med randbetingelser

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 2, \quad t > 0.$$

Oppgave 2

I denne oppgaven skal vi studere førsteordens partielle differensialligninger på formen

$$u_t + a u_x = 0 \quad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{4}$$

hvor $a > 0$ er en konstant.

(Fortsettes på side 2.)

2-a

Bestem de karakteristiske kurvene til (4) og benytt disse til å finne en formel for løsningen som tilfredsstiller initial- og randbetingelsene

$$u(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{5}$$
$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{6}$$

hvor initialfunksjonen f tilfredsstiller $f(0) = 0$. Forklar hvorfor løsningen $u(x,t)$ tilfredsstiller

$$\|u(\cdot,t)\|_\infty \le \|f\|_\infty, \quad t > 0,$$

hvor $\|f\|_\infty = \sup_{x\in(0,1)} |f(x)|$. Hva er verdien av $u(x,t)$ for $x \in (0,1)$ og $t > a^{-1}$?

2-b

En eksplisitt differensmetode for problemet (4)–(6) er gitt ved

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} + a\frac{v_j^m - v_{j-1}^m}{\Delta x} = 0, \quad 1 \le j \le n,\ m \ge 0,$$

hvor $\Delta t > 0$, $\Delta x = 1/n$, og $v_j^m = v(j\Delta x, m\Delta t)$ approksimerer $u(j\Delta x, m\Delta t)$. I tillegg har vi fra initial- og randbetingelsene at

$$v_0^m = 0 \quad \text{og } v_j^0 = f(j\Delta x). \tag{7}$$

Gi en betingelse på diskretiseringsparameterne Δx og Δt som sikrer at

$$\|v^m\|_{h,\infty} \le \|f\|_{h,\infty}, \tag{8}$$

hvor $\|f\|_{h,\infty} = \max_{j=0,1,\ldots,n} |f(j\Delta x)|$.

2-c

En implisitt differensmetode for problemet (4)–(6) er gitt ved

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} + a\frac{v_j^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{\Delta x} = 0, \quad 1 \le j \le n,\ m \ge 0,$$

satt sammen med initial- og randbetingelsene (7). Forklar kort hvordan verdiene v_j^{m+1} kan beregnes når alle verdiene v_j^m er kjent, og vis at for denne metoden vil estimatet (8) alltid være oppfylt.

Oppgave 3

3-a

For en gitt funksjon f betrakt randverdiproblemet

$$-u_{xx} + u = f, \quad x \in (0,1), \tag{9}$$

(Fortsettes på side 3.)

med Neumann randbetingelser gitt ved

$$u_x(0) = u_x(1) = 0. \tag{10}$$

Vis at enhver løsning u tilfredsstiller

$$\int_0^1 [(u_x(x))^2 + (u(x))^2]\,dx = \int_0^1 f(x)u(x)\,dx,$$

og forklar hvordan denne identiteten kan benyttes til å vise at problemet (9), (10) har høyst en løsning.

3-b

Betrakt ligningen

$$-u_{xx} = f, \quad x \in (0,1) \tag{11}$$

med randbetingelsene (10). Forklar hvorfor dette problemet ikke har en entydig løsning u, og vis at hvis det fins en løsning, så må funksjonen f tilfredstille

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0.$$

3-c

Som et alternativ til problemet (10),(11) betrakter vi systemet

$$-u_{xx} + \lambda = f, \quad x \in (0,1), \tag{12}$$

$$\int_0^1 u(x)\,dx = a, \tag{13}$$

sammen med randbetingelsene (10). Her er funksjonen f og konstanten $a \in \mathbb{R}$ gitt, og funksjonen u og konstanten $\lambda \in \mathbb{R}$ er de ukjente. Vis at problemet (10), (12), (13) har høyst en løsning u, λ.

3-d

Anta at funksjonen f kan uttrykkes i en Fourier cosinus rekke på formen

$$f(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\pi x).$$

Finn en formell løsning u, λ til problemet (10), (12), (13) uttrykt ved den gitte konstanten a og koeffisintene c_k.

SLUTT