UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 3360 — Innføring i partielle differensialligninger
Eksamensdag:	June 8, 2015
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

1-a

Løs varmeledningsproblemet

$$u_t = u_{xx}, \quad x \in (0,1),\, t > 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{100} c_k \sin(k\pi x), \quad x \in (0,1), \tag{3}$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_{100}$ er gitte reelle konstanter.

1-b

Løs problemet (1), med randbetingelse (2), og med initialbetingelse

$$u(x,0) = x(1-x), \quad x \in (0,1). \tag{4}$$

1-c

Bruk separasjon av variable til å løse ligningen

$$u_t - u_{xxt} = u_{xx}, \quad x \in (0,1),\, t > 0,$$

med randbetingelse (2) og initialbetingelse (3).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

2-a

Betrakt det "bakvendte varmeledningsproblemet" gitt ved

$$u_t = -u_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{5}$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t > 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{7}$$

hvor vi spesielt gjør oppmerksom på minustegnet i (5). Bestem en løsning når $f(x) = \sin(k\pi x)$, hvor $k > 0$ er et heltall.

2-b

La $t > 0$ være gitt. Forklar hvorfor det ikke finnes noen konstant $C > 0$, uavhengig av initialfunksjonen f, slik at

$$\int_0^1 u^2(x,t)\,dx \le C \int_0^1 f^2(x)\,dx.$$

Er problemet (5) – (7) stabilt med hensyn på perturbasjoner av initialfunksjonen? Begrunn svaret.

2-c

Anta at vi erstatter (5) med den modifiserte ligningen

$$u_t - \delta u_{xxt} = -u_{xx}, \quad x \in (0,1),\ t > 0, \tag{8}$$

hvor $\delta > 0$ er en liten parameter. Vis at glatte løsninger til problemet (6) – (8) tilfredsstiller

$$E(t) \le e^{2t/\delta} E(0), \quad \text{der } E(t) = \int_0^1 [u^2(x,t) + \delta u_x^2(x,t)]\,dx.$$

Oppgave 3

3-a

Vi betrakter randverdiproblemet

$$\epsilon^2 u''(x) + 2xu'(x) = 0, \quad x \in (0,1), \tag{9}$$

$$u(0) = a,\ u(1) = b, \tag{10}$$

hvor a, b er reelle konstanter og $\epsilon > 0$. Vis at funksjonen

$$u_\epsilon(x) = a + \frac{(b-a)H(x/\epsilon)}{H(1/\epsilon)},$$

hvor $H(z) = \int_0^z e^{-t^2}\,dt$, løser dette problemet og bruk dette til å vise at

$$\min(a,b) \le u_\epsilon(x) \le \max(a,b), \quad x \in [0,1]. \tag{11}$$

(Fortsettes på side 3.)

3-b

For alle $x \in [0,1]$ bestem grensen av $u_\epsilon(x)$ når $\epsilon \to 0$. Er konvergensen uniform på $[0,1]$? Skisser funksjonen u_ϵ når ϵ er liten, $a = 1$, og $b = 2$.

3-c

Anta at følgen $\{v_j\}_{j=0}^{n+1}$ tilfredsstiller differensligningen

$$v_j = \alpha_j v_{j+1} + \beta_j v_{j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

hvor koeffisientene tilfredsstiller

$$\alpha_j, \beta_j > 0, \ \alpha_j + \beta_j = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Vis at

$$\min(v_0, v_{n+1}) \leq v_j \leq \max(v_0, v_{n+1}), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

3-d

Anta at problemet (9), (10) approksimeres med differensmetoden

$$\epsilon^2 \frac{v_{j+1} - 2v_j + v_{j-1}}{h^2} + 2x_j \frac{v_{j+1} - v_{j-1}}{2h} = 0, \quad 1 \leq j \leq n, \tag{12}$$

$$v_0 = a, \quad v_{n+1} = b, \tag{13}$$

hvor $x_j = jh$. Vis at hvis $h < \epsilon^2$, så vil alle løsninger til differensmetoden tilfredsstille følgende analog av (11):

$$\min(a, b) \leq v_j \leq \max(a, b) \quad 0 \leq j \leq n + 1. \tag{14}$$

3-e

Vis ved et moteksempel at hvis ϵ er liten i forhold til h, så vil (14) ikke holde. (Tips: Betrakt tilfelle $n = 1$.)