UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT-INF 3360 — Innføring i partielle differensialligninger
Eksamensdag:	June 7, 2017
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

1-a

Løs initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t + 4u_x &= 0, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= e^{-x^2}. \end{aligned}$$

1-b

Bestem løsningen til initialverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t + xu_x &= 1, \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \phi(x), \end{aligned}$$

uttrykt ved hjelp av initialfunksjonen $\phi(x)$.

Oppgave 2

2-a

Bestem Fourier sinus rekka til funksjonen

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1/2, \\ -1, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

Vis spesielt at $c_k = 0$ for alle k som *ikke* er på formen $k = 4m - 2$ for $m = 1, 2, \ldots$.

(Fortsettes på side 2.)

2-b

Løs varmeledningsproblemet gitt ved

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx}, \quad x \in (0,1),\, t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in (0,1), \end{aligned}$$

hvor funksjonen f er gitt som i Oppgave 2-a.

2-c

Løs initial- og randverdiproblemet for bølgeligningen på formen

$$\begin{aligned} u_{tt} &= u_{xx}, \quad x \in (0,1),\, t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= 0, \quad u_t(x,0) = f(x), \end{aligned}$$

hvor funksjonen f er gitt som i Oppgave 2-a.

2-d

Løs Poisson problemet gitt ved

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0, \quad x, y \in (0,1), \\ u(x,0) = u(0,y) &= u(1,y) = 0, \\ u(x,1) &= f(x), \end{aligned}$$

hvor funksjonen f er gitt som i Oppgave 2-a.

2-e

La $g = g(x)$ være 2-periodisk og gitt ved

$$g(x) = \begin{cases} 1 + x, & -1 < x < -1/2 \\ -x, & -1/2 < x < 0 \\ x, & 0 < x < 1/2 \\ 1 - x, & 1/2 < x < 1. \end{cases}$$

på intervallet $(-1, 1)$. Forklar hvordan du kan finne den fulle Fourier rekka til g fra Fourier sinus rekka til funksjonen f gitt i Oppgave 2-a.

(Tips: Beregn g'.)

Vil Fourier rekka konvergere uniformt mot g? Begrunn svaret.

Oppgave 3

3-a

Vi betrakter initial- og randverdiproblemet

$$\begin{aligned} u_t &= \epsilon u_{xx} + b(x)u, \quad x \in (0,1),\, t > 0, \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in (0,1), \end{aligned} \tag{1}$$

(Fortsettes på side 3.)

hvor $\epsilon > 0$ er en konstant og $b = b(x)$ er en kontinuerlig funksjon som tilfredstiller $0 \leq b(x) \leq 1$. Initialfunksjonen f antas å være stykkevis kontinuerlig på $[0, 1]$. Vis ved hjelp av energiestimater at hvis $\epsilon > \pi^{-2}$, så vil enhver løsning u tilfredsstille

$$\int_0^1 [u(x,t)]^2 \, dx \to 0 \quad \text{når } t \to \infty.$$

Her kan du benytte Poincaré ulikheten

$$\int_0^1 [g(x)]^2 \, dx \leq \pi^{-2} \int_0^1 [g'(x)]^2 \, dx,$$

som gjelder hvis g' er stykkevis kontinuerlig og $g(0) = g(1) = 0$.

I resten av oppgaven antar vi at b er konstanten 1.

3-b

Anta at $\epsilon = \pi^{-2}$. Gi et eksempel på en initialfunksjon f som er slik at den korresponderende løsningen u til (1) har egenskapen at $\int_0^1 [u(x,t)]^2 \, dx$ ikke avtar når t vokser.

3-c

Anta vi betrakter problemet (1) med initialfunksjonen f gitt som i Oppgave 2-a. Vis at hvis $\epsilon > 1/(4\pi^2)$ så vil løsningen ha egenskapen at

$$\int_0^1 [u(x,t)]^2 \, dx \to 0, \quad \text{når } t \to \infty.$$