

MAT3360, vår 2022

Obligatorisk oppgave nr. 1 av 2.

Innleveringsfrist. Torsdag 3. mars 2022, klokken 14:30, i Canvas (canvas.uio.no).

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av $\text{\LaTeX}$). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist. Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

You must have a score of at least 60% to pass the exercise.

Background. We say that a function w is piecewise differentiable on the interval $[0, 1]$ if w is continuous on $[0, 1]$ and $w'(x)$ exists for all $x \in [0, 1]$ except for a finite number of internal points $\{x_j\}$, $j = 1, \dots, M$, and the limits

$$\lim_{x \nearrow x_j} w'(x) \text{ and } \lim_{x \searrow x_j} w'(x)$$

both exist for all j (and are therefore finite). We let H denote the space of piecewise differentiable functions on $[0, 1]$.

The space $C_0^2([0, 1])$ is defined to consist of those functions w in $C^2((0, 1)) \cap C([0, 1])$ such that $w(0) = w(1) = 0$. We also use the notation

$$\|u\| = \left(\int_0^1 u^2(x) dx \right)^{1/2}$$

for the mean square norm. The Cauchy-Schwartz inequality

$$\int_0^1 u(x)v(x) dx \leq \|u\| \|v\|$$

will also be useful.

Consider the boundary value problem

$$(1) \quad \begin{cases} -u'' = f & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases}$$

where f is a known function in $C((0, 1))$. We say that u is a *classical* solution of (1) if $u \in C_0^2([0, 1])$ and $-u''(x) = f(x)$ for all $x \in (0, 1)$.

Let

$$H_0 = \{u \in H \mid u(0) = u(1) = 0\}.$$

We say that u is a *weak* solution of (1) if $u \in H_0$ and

$$(2) \quad \int_0^1 u'(x)v'(x) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx \text{ for all } v \in H_0.$$

Question 1. Show that for each u in H there is a constant $L < \infty$ such that

$$|u(x) - u(y)| \leq L |x - y| \text{ for all } x, y \in [0, 1].$$

Question 2. Show that

$$|u(x)|^2 \leq \min \{x, 1 - x\} \|u'\|^2 \text{ for } u \in H_0.$$

Question 3. Show that classical solutions are weak solutions.

Question 4. Show that weak solutions are unique.

Galerkin's method. Let the V_N be a subspace of H_0 spanned by the linearly independent functions $\varphi_k \in H_0$, $k = 1, \dots, N$. Define $u_N \in V_N$ (which means that $u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$) to be the solution of

$$(3) \quad \int_0^1 u'_N(x) v'(x) dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx \quad \text{for all } v \in V_N.$$

Question 5. Let u be the (if it exists) weak solution of (1), show that

$$\int_0^1 (u - u_N)'(x) v'(x) dx = 0 \quad \text{for all } v \in V_N.$$

Question 6. Show that

$$\|(u - u_N)'\| \leq \inf_{v \in V_N} \|(u - v)'\| \quad (\text{Cea's inequality}).$$

Question 7. Show that

$$|u(x) - u_N(x)|^2 \leq \min\{x, 1 - x\} \left(\inf_{v \in V_N} \|(u - v)'\| \right)^2.$$

Question 8. Let $u_N = \sum_{k=1}^N c_k \varphi_k$ and assume that u_N satisfies (3). We write $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_N)^T$, find an $N \times N$ symmetric matrix $\mathbf{A}$ and a vector $\mathbf{b}$ such that $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, i.e., find the components a_{kl} and b_k given $\{\varphi_k\}$ and f .

Question 9. Find a formula for u_N (involving f) if $\varphi_l(x) = \sin(l\pi x)$.

Now define $h = 1/(N + 1)$, $x_k = kh$, and set

$$\psi(x) = \max\{1 - |x|, 0\}.$$

For $k = 1, \dots, N$ set

$$\varphi_k(x) = \psi\left(\frac{x - x_k}{h}\right).$$

From now on we shall let V_N be the space spanned by these functions. (In order to get the idea of what these functions look like, you can draw the graphs of φ_1 , φ_2 and φ_3 if $N = 3$.)

Question 10. Assume that there exists a classical solution to (1), and let u_N solve (3). Show the error estimate

$$(4) \quad |u(x) - u_N(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{x \in (0,1)} |f(x)| h$$

for all $x \in [0, 1]$.

Question 11. Find the matrix $\mathbf{A}$, then find the vector $\mathbf{b}$ if $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$.

(Note that if $f(x) = \pi^2 \sin(\pi x)$ the classical solution is $u(x) = \sin(\pi x)$.)

Question 12. Implement the method on a computer (that is, define $\mathbf{A}$ and $\mathbf{b}$, then solve the equation $\mathbf{A}\mathbf{c} = \mathbf{b}$, you don't have to program the actual solver, use “\” in Matlab, similar software exists in Python, Julia etc.). Comment your code!

Test your code for $N = 10$. What are the errors?