

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT3420 — Kvanteberegning

Eksamensdag: Onsdag, 3. juni 2026

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på 7 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Det finnes to deler i denne eksamenen. I del I skal du svare på alle spørsmålene. Alle spørsmål i denne delen er flervalgsoppgaver, og du kan bare skrive svaret ditt uten begrunnelse. I del II skal du begrunne svaret ditt med passende mengder resonnering. Velg to ut av de fire oppgavene fra denne delen. Du kan velge flere enn to å svare på, men vi kommer til å bruke de to beste blant svarene dine for å bestemme karakteren din.

Du kan bruke disse formlene uten forklaring. Det indre produktet på Hilbert-rommet $\mathbb{C}^n$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i^* w_i;$$

Matriseproduktet av en $l \times m$ -matrise A og en $m \times n$ -matrise B :

$$AB = \left[\sum_{k=1}^m A_{ik} B_{kj} \right]_{i,j};$$

Kvbittilstander:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle), \quad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle);$$

Enkle kvbitporter:

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$
$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Del I

Oppgave 1

Hvilken av de følgende er den meste passende forklaringen på kvantemekaniske tilstander?

1. De representeres av enhetsvektorer i et Hilbert-rom.
2. De representeres av vilkårlig vektorer i et Hilbert-rom.
3. De representeres av punkter i fase-rommet, der Lagrangian er definert som en funksjon som gir differensialligninger for å beskrive tidsutviklingen til systemet.

Oppgave 2

Anta at vi har et kvbitsystem i tilstanden $|+\rangle$. Etter at vi gjør en måling i beregningsbasen, hva er den mest passende beskrivelsen av systemet.

1. Det vil være i tilstanden $|+\rangle$.
2. Avhengig av resultatet av målingen vil det være i tilstanden $|0\rangle$ eller $|1\rangle$.
3. Det vil være i tilstanden $|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$.

Oppgave 3

Anta at vi vil måle en kvbitttilstand i basen $(|+\rangle, |-\rangle)$. Hvilket sett med matriser kan brukes som et projeksjonsverdiert mål for denne oppgaven?

1. Identitetsmatrisen I_2 og nullmatrisen 0_2 .
2. Matrisene

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. De unitarie matrisene X og Z .

Oppgave 4

Anta at vi transformerer enkelkvbitsystem med kvanteporten H , og deretter gjør en ny transformasjon med porten Y . Hvilken matrise representerer den sammensatte transformasjonen?

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -i & i \\ i & i \end{bmatrix}.$$

Oppgave 5

Anta at vi har kvbitttilstanden

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

(Fortsettes på side 3.)

Hva er sannsynligheten $\mathbb{P}[+]$ for å observere tilstanden $|+\rangle$?

$$1. \quad \mathbb{P}[+] = 0, \quad 2. \quad \mathbb{P}[+] = \frac{1+i}{2}, \quad 3. \quad \mathbb{P}[+] = \frac{1}{2}.$$

Oppgave 6

Hvilken av de følgende matrisene er gyldig som en transformasjon av et kvbitsystem?

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 7

Hvilken av de følgende påstandene er passende om dimensjonen til Hilbertrommene som representerer flerkvbitsystemer?

1. Hver gang vi øker antallet kvbiter, trenger vi én dimensjon ekstra.
2. Hver gang vi øker antallet kvbiter, trenger vi to dimensjoner ekstra.
3. Hver gang vi øker antallet kvbiter, trenger vi en dobling av dimensjonen.

Oppgave 8

Betrakt de følgende tokvbit-tilstandene. Hvilken er sammenfiltret?

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad v_2 = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle), \quad v_3 = |01\rangle.$$

Oppgave 9

Hvilken av de følgende er densitetsmatrisen som representerer en blanding av tilstandene $|+\rangle$ og $|-\rangle$, slik at $|+\rangle$ observeres med sannsynligheten $\frac{1}{2}$?

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Oppgave 10

Hvilken av de følgende forklaringene beskriver kvanteuniversellitet?

1. Ved å starte med et passende valg grunnleggende kvanteporter, kan man tilnærme vilkårlige kvanteporter til vilkårlig presisjon ved hjelp av komposisjon og tensorprodukt.
2. Kvantepoter er enten refleksjoner eller rotasjoner.
3. Kvanteberegning oppnås med ulike kombinasjoner av NAND-porten.

(Fortsettes på side 4.)

Del II

Oppgave 11

Husk CHSH-spillet, som involverer to kooperative spillere, Alice og Bob, og en dommer Charlie:

- Charlie gir en spørsmålbit $x = 0, 1$ til Alice, og en annen bit $y = 0, 1$ til Bob;
- Alice svarer med en bit $a = 0, 1$, og Bob svarer tilsvarende med en bit $b = 0, 1$ (uten kommunikasjon);
- De vinner hvis ligningen $a + b = xy$ mod 2 stemmer, og taper ellers.

Kvantestrategien går som følger:

1. Alice og Bob forbereder EPR-par-tilstanden $u = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ i det tokvbitsystemet. De har tilgang til hver sin kvbit.
2. Gitt spørsmålet x beregner Alice $a = 0, 1$ som følger:
 - Hvis $x = 0$, måler hun sin del av tilstanden i den beregningsbasen. Resultatet skal være a .
 - Hvis $x = 1$, måler hun sin del i basen $(|+\rangle, |-\rangle)$. Utfallet “+” tilsvarer $a = 0$, mens utfallet “−” tilsvarer $a = 1$.
3. Gitt spørsmålet y beregner Bob $b = 0, 1$ som følger:
 - Hvis $y = 0$, måler han sin del av tilstanden i basen

$$v_0 = \cos \frac{\pi}{8} |0\rangle + \sin \frac{\pi}{8} |1\rangle, \quad v_1 = \cos \frac{5\pi}{8} |0\rangle + \sin \frac{5\pi}{8} |1\rangle.$$

Utfallet “ v_0 ” tilsvarer $b = 0$, mens utfallet “ v_1 ” tilsvarer $b = 1$.

- Hvis $y = 1$, måler han sin del i basen

$$w_0 = \cos \frac{-\pi}{8} |0\rangle + \sin \frac{-\pi}{8} |1\rangle, \quad w_1 = \cos \frac{3\pi}{8} |0\rangle + \sin \frac{3\pi}{8} |1\rangle.$$

Utfallet “ w_0 ” tilsvarer $b = 0$, mens utfallet “ w_1 ” tilsvarer $b = 1$.

Under de neste oppgavene antar vi at Charlie velger spørsmålene $(x, y) \in \{0, 1\}^2$ uniformt tilfeldig.

a

Anta at de begynte med den separable tilstanden $u' = |01\rangle$ i stedet for u , men ellers fulgte den samme algoritmen. Hva er vannersannsynligheten deres?

b

Anta at de begynte med den sammenfiltrede tilstanden $u'' = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0+\rangle + |1-\rangle)$ i stedet for u , men ellers fulgte den samme algoritmen. Sammenlign vannersannsynligheten med den fra den opprinnelige algoritmen og den fra del **a**. (Du trenger ikke gi et eksakt tall for sannsynligheten.)

(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 12

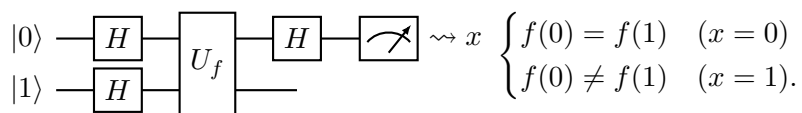
Husk Deutsch–Josza-problemet:

Vi er gitt en funksjon $f(x)$ med inputverdier $x \in \{0, 1\}^k$ og outputverdier $f(x) = 0, 1$, slik at enten er $f(x) = 0$ for nøyaktige halvdelen av alle inputverdier x og $f(x) = 1$ for de øvrige (det balanserte tilfellet), eller så er $f(x) = i$ for alle x , der $i = 0$ eller $i = 1$ (det konstante tilfellet). Bestem hvilket utfall som foreligger.

Deres kvantealgoritme med $k + 1$ qvitter bruker XOR-query-porten

$$U_f |xy\rangle = |xz\rangle \quad (x \in \{0, 1\}^k, y \in \{0, 1\}, z = \text{XOR}(y, f(x)))$$

som følger:



a

Anta at den initielle tilstandsforberedelsen hadde en feil, og at vi startet med

$$((\cos \epsilon) |1 \cdots 1\rangle + (\sin \epsilon) v) \otimes |1\rangle$$

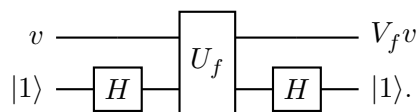
i stedet for $|1 \cdots 1\rangle$, der v er en vektor som er ortogonal på $|1 \cdots 1\rangle$. Vurder sannsynligheten for å få et riktig svar. Vi kan anta at de kvanteportene ikke innfører noen ekstra feil.

b

Husk fase-query-porten

$$V_f |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle,$$

som oppfyller



Tegn et k -qvbit-kvnatekrets som løser Deutsch–Josza-problemet med én bruk av fase-query-porten.

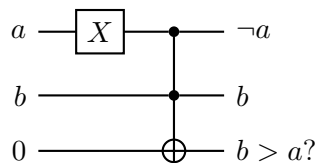
Oppgave 13

Vi vil konstruere en reversibel logisk krets som sammenligner to 2-bit-tall a og b , og setter et flaggbitt når $a < b$. La oss si at 2-bit-strengen $a = a_0 a_1$ representerer tallet $2a_0 + a_1$. Betingelsen $b > a$ kan uttrykkes som

$$“b_0 > a_0” \text{ eller } “b_0 = a_0 \text{ og } b_1 > a_1”.$$

(Fortsettes på side 6.)

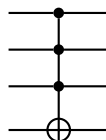
Sammenligning av 1-bit-tall kan konstrueres med kretsen



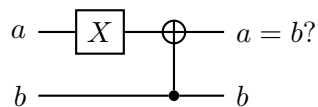
Her skriver vi a i stedet for $|a\rangle$, og “ $b > a$?” er lik 1 når $b > a$ (dvs. $a = 0$ og $b = 1$).

a

Tegn en reversibel krets med fem tråder, som representerer a_0, a_1, b_0, b_1 , og t (t er målbiten) som setter t når “ $b_0 = a_0$ og $b_1 > a_1$ ”. Du kan bruke X -porten (NOT), CNOT-porten og multi-kontrollert CNOT-port som



Merk at vi kan teste bit-likhet med



b

Tegn hele kretsen med fem tråder som i del **a**, som mottar $a = a_0a_1, b = b_0b_1$ og f , og som gir ut a og b uendret mens den endrer f når $b > a$.

Hvis du ikke klarte å fullføre del **a**, kan du bruke den delen som en svart eske, men du skal forklare hvordan man retter opp endringer som er innført i til a_i - og b_i -bittene av portene over.

Oppgave 14

Husk Grovers søkeproblemet: finn det «markerte inputet» $x^* \in \{0,1\}^k$ spesifisert av en boolsk funksjon $f: \{0,1\}^k \rightarrow \{0,1\}$, der x^* er en løsning som oppfyller $f(x^*) = 1$. Algoritmen hans består i å måle

$$v_j = (DV_f)^j |+\cdots+\rangle$$

for en passende verdi av j , med fase-query-porten

$$V_f |x\rangle = (-1)^{f(x)} |x\rangle$$

og diffusjonsoperatoren

$$D |x\rangle = \frac{1}{2^{k-1}} \sum_{y \in \{0,1\}^k} |y\rangle - |x\rangle.$$

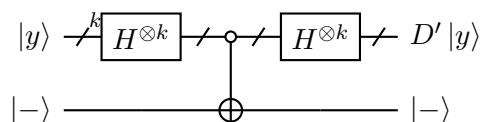
(Fortsettes på side 7.)

a

For å minimere feil fra kvanteporter ønsker vi å anvende et så lite antall D - og V_f -porter som mulig på systemet, så lenge vi kan få en kandidat for x^* med sannsynlighet minst $\frac{1}{2}$. (Vi vet at det markerte inputet er unikt.) Gi et estimat for et passende antall steg j å stoppe på.

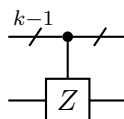
b

En implementasjon av den modifiserte diffusjonsoperatoren $D' = -D$ med en hjelpekvbit ble gitt ved følgende:



der vi i midten har en kontrollert-NOT-port med kontrollbetingelsen $x = 0 \dots 0$ for k -bit-strengen x .

Gi en implementation av D' uten hjelpekvbiten. Du kan bruke en multi-kontrollert Z port



som snur fortegnet på beregningsbasisen $|11 \dots 1\rangle$ men lar de andre basisvektorene $|x\rangle$ for $x \in \{0, 1\}^k$ være uendret.

SLUTT