UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 232 — Topologi.
Eksamensdag:	Tirsdag 9. juni 1998.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La X være et lokalkompakt Hausdorff-rom og la X^* være ettpunktskompaktifikasjonen av X.

a) Vis at hvis A er en lukket delmengde av X, så er A også lokalkompakt, og vis at ettpunktskompaktifikasjonen A^* av A på naturlig måte kan betraktes som et underrom av X^*.

b) Anta nå at X også er lokalt sammenhengende. Vis at da er X^* sammenhengende hvis og bare hvis X ikke har noen kompakte komponenter.

Oppgave 2.

Et punkt x i et topologisk rom X kalles *isolert* dersom $\{x\}$ er åpen i X.

Vis at et ikketomt komplett metrisk rom uten isolerte punkter ikke kan være tellbart.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

Hvis X er en mengde og τ en topologi på X, skal vi i denne oppgaven betegne det tilhørende topologiske rommet med (X, τ). Hvis $\tau \subseteq \tau'$ kaller vi τ *grovere* enn τ' og τ' *finere* enn τ.

La $\mathbf{R}$ være mengden av reelle tall, og τ_0 standardtopologien på $\mathbf{R}$.

a) Hvis $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ er en funksjon, lar vi $\tau_f = \{f^{-1}(\mathcal{U}) \mid \mathcal{U} \in \tau_0\}$.
Vis at τ_f er en topologi på $\mathbf{R}$.

b) Vis at τ_f er den groveste topologien på $\mathbf{R}$ slik at $f : (\mathbf{R}, \tau_f) \to (\mathbf{R}, \tau_0)$ er kontinuerlig, og vis at en funksjon $g : (X, \tau) \to (\mathbf{R}, \tau_f)$ er kontinuerlig hvis og bare hvis $f \circ g : (X, \tau) \to (\mathbf{R}, \tau_0)$ er kontinuerlig.

c) La nå $h(x) = x^2$. Avgjør om $(\mathbf{R}, \tau_h)$ i dette tilfellet er

(i) Hausdorff
(ii) sammenhengende
(iii) kompakt, eventuelt lokalkompakt.

Er $(\mathbf{R}, \tau_h)$ metriserbart?

d) La $g(x) = \begin{cases} x & \text{for } x \leq 0 \\ x+1 & \text{for } x > 0 \end{cases}$. Vis at τ_g er ekte finere enn τ_0.

e) Vis at $\tau_f = \tau_0$ hvis og bare hvis f er en imbedding.

Oppgave 4.

La Y være mengden av alle 2-dimensjonale underrom i $\mathbf{R}^4$, og la $F_0 \in Y$ være underrommet utspent av vektorene $\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$ og $\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\\0\end{smallmatrix}\right)$.

La avbildningen $q : SO(4) \to Y$ være gitt ved $q(A) = A(F_0)$.

a) Forklar hvorfor q er surjektiv og angi en ekvivalensrelasjon på $SO(4)$ slik at vi kan identifisere Y med $SO(4)/\sim$.
Vis at for $A \in SO(4)$ er $q^{-1}(qA) = \{AB \mid B(F_0) = F_0\}$.

Vi gir nå Y kvotienttopologien.

b) Vis at q er en åpen avbildning, og vis at $\lambda : SO(4) \times Y \to Y$ definert ved $\lambda(A, F) = A(F)$ er kontinuerlig.

(Fortsettes side 3.)

c) For $A \in SO(4)$ definerer vi $\lambda_A : Y \to Y$ ved $\lambda_A(F) = \lambda(A, F)$.
Vis at hver λ_A er en homeomorfi med minst to fikspunkter.

d) Vi definerer en injektiv avbildning $\gamma : Y \to SO(4)$ ved
$$\gamma(F)x = \begin{cases} -x & \text{for } x \in F \\ x & \text{for } x \in F^\perp \end{cases}.$$
($F^\perp$ er det ortogonale komplementet til F.)
Vis at γ er en imbedding.
(Vink: Observer først at $\gamma q(A) = A \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A^{-1}$.)

SLUTT