UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 232 — Topologi.
Eksamensdag:	Onsdag 9. juni 1999.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La V være et reelt normert vektorrom med norm $|\ \ |$. La S være mengden av enhetsvektorer i V, gitt ved betingelsen $|x| = 1$.

a) Vis at en lineær operator $A : V \to V$ er kontinuerlig hvis og bare hvis det fins en konstant c slik at $|Ay| \leq c$ for alle $y \in S$. Vis ved eksempel at ikke alle lineære operatorer på ethvert normert rom trenger å være kontinuerlige. (Vink: Prøv med en derivasjonsoperator D på et passende funksjonsrom.)

b) Sett $\|A\| = \sup_{y \in S} |Ay|$ for kontinuerlig A. Vis at vi har

$$|Ax| \leq \|A\| \, |x| \quad \text{og} \quad \|BA\| \leq \|B\| \, \|A\|$$

for alle $x \in V$ og alle kontinuerlige A, B. Her betyr BA den sammensatte operatoren definert ved $(BA)x = B(Ax)$. Operatorene $A + B$ og sA (for s reell) er tilsvarende definert.

Mengden $\mathcal{E}$ av kontinuerlige lineære operatorer på V danner en algebra med operasjonene sA og $A + B$ og BA. Forsynt med normen $\|A\| = \sup_{y \in S} |Ay|$ blir $\mathcal{E}$ en normert algebra, spesielt et normert vektorrom.

(Fortsettes side 2.)

c) Vis at hvis V er komplett, så er $\mathcal{E}$ komplett.

I resten av oppgaven antar vi at V er komplett. La E være identitets-operatoren på V, gitt ved $Ex = x$.

d) Vis at hvis $A \in \mathcal{E}$ oppfyller $\|A\| < 1$, så konvergerer følgen av operatorer $B_n = E + A + A^2 + \ldots + A^n$ mot en operator $B \in \mathcal{E}$ som er invers til $E - A$. Spesielt er $E - A$ en invertibel operator.

e) Vis at mengden $\mathcal{E}_0$ av invertible operatorer i $\mathcal{E}$ er åpen. (Vink: Vis at for hver $T \in \mathcal{E}_0$ gjelder $\|E - AT^{-1}\| < 1$ når A er tilstrekkelig nær T, for eksempel når $\|T - A\| < 1/\|T^{-1}\|$.)

Oppgave 2.

La X være et lokalt kompakt Hausdorff-rom. La τ være systemet av åpne mengder i X (topologien) og $\beta \subseteq \tau$ en basis for topologien, slik at hver åpen mengde kan skrives som en union av mengder fra β. La $\beta_c \subseteq \beta$ være undersystemet av mengder fra β som har kompakt tillukning.

a) Vis at også β_c er en basis for topologien.

Anta videre at X har en tellbar basis for topologien.

b) Vis at X kan skrives som en union av tellbart mange kompakte delmengder $C_1, C_2, \ldots$ med $C_i \subseteq \operatorname{int} C_{i+1}$ for $i = 1, 2, \ldots$.

La $X^* = X \cup \{\infty\}$ være ettpunktskompaktifikasjonen til X.

c) Vis at ∞ har en tellbar omegnsbasis i X^*.

Oppgave 3.

La $M(n)$ være rommet av $n \times n$-matriser med standardtopologien, og la $\mu : M(n) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ være operasjonen $\mu(A, x) = Ax$, der Ax står for matrisen A anvendt på (søyle-) vektoren x. Det anses kjent at μ er kontinuerlig.

La $O(n) \subseteq M(n)$ være gruppen av ortogonale matriser, forsynt med underromstopologien, og la $G \subseteq O(n)$ være en lukket undergruppe av $O(n)$ (slik at G er en lukket delmengde av $O(n)$ som inneholder identitetsmatrisen

(Fortsettes side 3.)

samt produktet BA og den inverse A^{-1} for alle $A, B \in G$). Gruppen G definerer en ekvivalensrelasjon $\equiv_G$ i $\mathbf{R}^n$, der $x \equiv_G y$ betyr at $y = Ax$ for en $A \in G$. Ekvivalensklassen til x er mengden $Gx = \{Ax : A \in G\}$. La $\mathbf{R}^n/G$ betegne mengden av ekvivalensklasser og $\pi : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n/G$ den kanoniske avbildningen $\pi(x) = Gx$. Vi gir $\mathbf{R}^n/G$ kvotienttopologien, slik at π blir en identifikasjon. Vis følgende:

a) π er en åpen avbildning.

b) $\mu|G \times \mathbf{R}^n$ er en lukket avbildning.

c) π er en lukket avbildning.

d) $\mathbf{R}^n/G$ er et Hausdorff-rom.

e) Inversbildet ved π av en kompakt mengde er kompakt.

Avgjør til slutt hvilken av følgende tre muligheter er korrekt:

f) $\mathbf{R}^n/G$ er kompakt. $\mathbf{R}^n/G$ er ikke kompakt, men lokalt kompakt. $\mathbf{R}^n/G$ er ikke lokalt kompakt.

SLUTT