UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 232 — Topologi.
Eksamensdag:	Fredag 7. juni 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

X og Y betegner alltid topologiske rom.

Oppgave 1.

La $f : X \to \mathbf{R}$ være en kontinuerlig funksjon på et topologisk rom X. Definer $\bar{f} : X \to X \times \mathbf{R}$ ved $\bar{f}(x) = (x, f(x))$.

a) Vis at $\bar{f}$ er en imbedding av X i produktrommet $X \times \mathbf{R}$, altså en homeomorfi på sitt bilde $G = \bar{f}(X)$ (grafen til f).

La $h : X \times \mathbf{R} \to X \times \mathbf{R}$ være avbildningen $h(x, t) = (x, t - f(x))$.

b) Vis at h er en homeomorfi av $X \times \mathbf{R}$ på seg selv og bestem bildet $h(G)$.

c) Vis at G er en lukket mengde i $X \times \mathbf{R}$.

Oppgave 2.

a) Vis at en kontinuerlig avbildning $f : X \to Y$ sender en kompakt mengde K i X til en kompakt mengde $f(K)$ i Y.

b) Vis at en kontinuerlig funksjon $g : X \to \mathbf{R}$ har et supremum $\sup_{x \in K} g(x)$ over en kompakt mengde K i X, som den antar i minst ett punkt.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

La $p : X \to Y$ være en kontinuerlig surjektiv avbildning mellom topologiske rom. En mengde $A \subseteq X$ kalles mettet dersom A er inversbildet av en mengde i Y, altså $A = p^{-1}(B)$ for en $B \subseteq Y$.

a) Vis at p er en identifikasjon hvis og bare hvis p avbilder mettete åpne mengder i X på åpne mengder i Y, eller mettete lukkete mengder i X på lukkete mengder i Y.

b) Vis at hvis p er en identifikasjon og $f : Y \to Z$ er en avbildning fra Y til et topologisk rom Z slik at $f \circ p : X \to Z$ er kontinuerlig, så er f kontinuerlig.

c) (c) La $X = [0, 1] \cup [2, 3]$, $Y = [0, 2]$ (begge underrom av $\mathbf{R}$) og $p : X \to Y$ gitt ved $p(x) = x$ når $x \in [0, 1]$ og $p(x) = x - 1$ når $x \in [2, 3]$.

   Er p en identifikasjon? Enn hvis X er underrommet $[0, 1) \cup [2, 3]$ og $p : X \to Y$ er restriksjonen til det mindre rommet? Begrunn svarene.

Oppgave 4.

La X være underrommet av $\mathbf{R^{n+1}}$ gitt ved likningen

$$-{x_1}^2 - {x_2}^2 - \cdots - {x_n}^2 + {x_{n+1}}^2 = 1.$$

Vis at X har to komponenter som hver er homeomorf med $\mathbf{R^n}$.

SLUTT