UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 232 — Topologi.
Eksamensdag:	Tirsdag 3. juni 2003.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $J = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} : |x_n| \leq \frac{1}{n}\}$

a) Vis at J er en lukket delmengde av

$$\ell^2(\mathbb{R}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}.$$

b) Vis at J er totalt begrenset.

c) Konkluder at J er kompakt, og formuler teoremene du har brukt.

Oppgave 2.

La $\mathbb{N}$ betegne de naturlige tall med topologi gitt ved de åpne mengdene $\emptyset, \mathbb{N}$, $U_n = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. La $\{0, 1\}$ ha topologi gitt ved de åpne mengdene $\emptyset$, $\{0\}$, $\{0, 1\}$.

a) Bestem de kontinuerlige funksjonene $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$.

b) Bestem de kontinuerlige funksjonene $g : \{0, 1\} \to \mathbb{N}$.

c) Verifiser om $\mathbb{N}$ og $\{0, 1\}$ er sammenhengende, Hausdorff eller lokalkompakte.

d) Karakteriser de kompakte mengdene i $\mathbb{N}$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

Hvis (X, τ) er et topologisk rom og $A \subset X$ så sier vi at et punkt $x \in X$ er et akkumulasjonspunkt til A hvis hver omegn om x inneholder et punkt $y \in A$, $y \neq x$. La $A \subset X$.

a) Vis at x er et akkumulasjonspunkt til A hvis og bare hvis det fins et nett i $A \setminus \{x\}$ som konvergerer mot x.

b) A er lukket hvis og bare hvis intet nett i A konvergerer mot et punkt i $X \setminus A$.

c) La B være mengden av akkumulasjonspunkter til A. Da er $A \cup B$ lukket, og $\bar{A} = A \cup B$.

Oppgave 4.

For et topologisk rom X defineres suspensjonen til X som kvotientrommet $SX = X \times [-1, 1]/\sim$ hvor $\sim$ er ekvivalensrelasjonen gitt ved at $(x, t) \sim (x', t')$ når $t = t' = 1$, $t = t' = -1$ eller $x = x'$ og $t = t'$. La $p : X \times [-1, 1] \to SX$ være den kanoniske avbildningen.

a) Vis at $i : X \to SX$ definert ved $i(x) = p(x, 0)$ avbilder X homeomorft på et lukket underrom av SX.

b) Vis at SX er kompakt hvis X er kompakt, og at SX generelt er veisammenhengende.

c) La avbildningen $f : S^1 \times [-1, 1] \to S^2$ være definert ved $f(x, t) = (\sqrt{1 - t^2}\, x, t)$ for $x \in S^1$ og $t \in [-1, 1]$. Vis at f er en identifikasjon og at f induserer en homeomorfi $f : SS^1 \to S^2$ (her er $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$ for $n = 1, 2$.)

SLUTT