UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 245 — Generell topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 19. desember 1991.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La X være et lokalkompakt Hausdorff-rom.

1) Gi definisjonen av hva etpunktskompaktifiseringen X^* til X er. Gi beviset for at X^* er kompakt. Karakteriser så X^* geometrisk når X er et åpent intervall (a, b) i $\mathbb{R}$. Skisser beviset uten å gå i detaljer.

2) La $a < b < c < d$ være reelle tall. Karakteriser X^* geometrisk når $X = (a, b) \bigcup (c, d)$. Skisser beviset.

Oppgave 2.

(Halvparten av vektleggningen av denne oppgaven bygger på føringen av bevisene og klarheten av språket.)

La X være et topologisk rom med tellbare omegnsbasiser, og la $A \subset X$ være en delmengde.

Vis at hvis $x \in X$ så er x i tillukningen $\bar{A}$ til A hvis og bare hvis det fins en følge i A som konvergerer mot x.

Formuler og bevis det tilsvarende resultat når X ikke har tellbare omegnsbasiser.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

Vi definerte Cantor mengden ved å starte med $C_0 = [0, 1]$. Vi tok så bort det midtre åpne intervallet $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ og lot $C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Denne prosessen fortsatte vi ved å ta bort det midtre åpne intervall av hvert lukket intervall, og vi fikk en følge $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ av delmengder av C_0 med C_n en union av 2^n lukkede intervaller med lengde 3^{-n}. Vi definerte Cantor mengden til å være $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ med den relative topologien fra $\mathbb{R}$.

1) Vis at C er kompakt, og hvis $I_n \subset C_n$ er et av de lukkede intervallene som utgjør C_n så er $I_n \cap C$ en åpen-lukket delmengde av C.

Vi definerte en funksjon $\varphi : C \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \left(= \prod_1^{\infty} \{0, 1\}\right)$ ved at $\varphi(x) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, der $x_1 = 0$ hvis x er i det venstre intervallet $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ i C_1, og $x_1 = 1$ hvis x er i det høyre intervallet $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Vi lot $x_n = 0$ hvis x er i det venstre intervallet av oppdelingen av det intervallet i C_{n-1} x tilhører, og $x_n = 1$ hvis x er i det høyre.

2) Vis at φ er en bijeksjon.

3) Vis at φ er kontinuerlig når $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ har produkttopologien. Konkluder fra dette at $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ er kompakt.

Oppgave 4.

La V være et normert vektorrom over $\mathbb{R}$, og la V^* være vektorrommet av kontinuerlige lineære funksjoner av V inn i $\mathbb{R}$. Gi V^* topologien τ for punktvis konvergens.

1) Vis at mengdene

$$U(f, A, \varepsilon) = \{g \in V^* : |g(x) - f(x)| < \varepsilon,\ x \in A\}$$

der $f \in V^*$, $A \subset V$ er endelig delmengde, og $\varepsilon > 0$, danner en omegnsbasis om f med hensyn på τ.

2) La

$$V_1^* = \{f \in V^* : |f(x)| \leq \|x\| \text{ for alle } x \in V\},$$

(Fortsettes side 3.)

og gi V_1^* den relative topologien fra V^*. For $x \in V$ la $\mathbb{R}_x$ betegne intervallet $[-\|x\|, \|x\|]$. Definer en avbildning

$$\varphi : V_1^* \to Y = \prod_{x \in V} \mathbb{R}_x$$

ved $(\varphi(f))(x) = f(x)$. La Y ha produkttopologien og vis at φ er en imbedding.

3) La $f \in Y$ være betraktet som en reell funksjon på V. Anta $f \in \overline{\varphi(V_1^*)}$. Vis at f er en kontinuerlig lineær funksjon på V.

4) Bruk det foregående til å vise at V_1^* er kompakt i topologien τ (Nå har du vist Alaoglus teorem!).

SLUTT