UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 245 — Generell topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 12. desember 1996.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

For $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ definer $\rho(t_1, t_2) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } t_1 \neq t_2 \\ 0 & \text{hvis } t_1 = t_2 \end{cases}$.
For $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ definer

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = |x_1 - x_2| + \rho(y_1, y_2).$$

a) Vis at d er en metrikk på $\mathbb{R}^2$.

b) Vis at $(\mathbb{R}^2, d)$ er et komplett metrisk rom.

c) Bestem sammenhengskomponentene i $\mathbb{R}^2$ i topologien vi får fra d.

Oppgave 2.

La τ være klassen av delmengder av $\mathbb{R}$ som er bestemt ved at U tilhører τ dersom enten $U = \emptyset$ eller $0 \in U$ og U er åpen i den vanlige topologien på $\mathbb{R}$.

a) Vis at τ er en topologi på $\mathbb{R}$.

b) Bestem tillukkingen til $\{0\}$ og til $\{x\}$ der $x \neq 0$, samt tillukkingen og interiøret til $[1, 2)$ i topologien τ.
Er $\mathbb{R}$ et Hausdorff-rom med topologien τ?

(Fortsettes side 2.)

c) La $K \subset \mathbb{R}$ være en kompakt mengde i den vanlige topologien på $\mathbb{R}$. Vis at K også er en kompakt mengde i topologien τ. Avgjør om $\mathbb{R}$ er lokalt kompakt i topologien τ. Er alle mengder som er kompakte i τ også lukkede i τ?

d) La $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en avbildning som er kontinuerlig i den vanlige topologien på $\mathbb{R}$. Anta også at $f(0) = 0$. Vis at da er f også kontinuerlig i topologien τ. Avgjør når f er kontinuerlig i τ dersom vi dropper betingelsen $f(0) = 0$.

Oppgave 3.

La X være et lokalt kompakt Hausdorff-rom. La ∞ være et punkt som ikke ligger i X. Sett $X^* = X \cup \{\infty\}$. Vi gir X^* en topologi ved at basisomegner for punkter i X er vanlige åpne omegner i X, og basisomegner om ∞ er komplementer i X^* av kompakte mengder i X. Vi kaller X^* ettpunkts-kompaktifikasjoner av X.

a) Vis at X^* er et kompakt Hausdorff-rom (det er ikke meningen at du skal vise at X^* er et topologisk rom).

b) La Z være et kompakt Hausdorff-rom. La $f\colon X \to Z$ være en imbedding. Anta mengden $Z - f(X)$ består av bare et punkt. Vis at det fins en homeomorfi $\widehat{f}\colon X^* \to Z$ slik at $\widehat{f}|X = f$.

c) La $f\colon X \to Y$ være en kontinuerlig avbildning mellom to lokalt kompakte Hausdorff-rom. La $f^*\colon X^* \to Y^*$ være definert ved at $f^*(\infty) = \infty$ og $f^*(x) = f(x)$ for $x \in X$. Vis at f^* blir kontinuerlig hvis og bare hvis $f^{-1}(K)$ er kompakt for hver kompakt $K \subset Y$.

d) La $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ og $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være definert ved $f(x,y) = (x,-y)$ og $g(x,y) = \frac{(x,y)}{1+x^2+y^2}$.
Avgjør om f og g kan utvides til kontinuerlige avbildninger $f^*, g^*\colon (\mathbb{R}^2)^* \to (\mathbb{R}^2)^*$ med $f(\infty) = g(\infty) = \infty$.

e) La X være et lokalt kompakt Hausdorff-rom som også er lokalt sammenhengende. La K være en kompakt sammenhengskomponent av X. Vis at K også blir en sammenhengskomponent av X^*. Vis at sammenhengskomponenten til ∞ i X^* er $\bigcup_i C_i \cup \{\infty\}$ der vi tar unionen over alle sammenhengskomponenter C_i av X som ikke er kompakte.

SLUTT