

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MA 245 — Generell topologi.

Eksamensdag: Torsdag 11. desember 1997.

Tid for eksamen: 09.00 – 15.00.

Oppgavesettet er på 2 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

For en vilkårlig funksjon $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la $C(f)$ være mengden av punkter i $\mathbb{R}$ hvor f er kontinuert.

- a) La U_n være unionen av alle åpne mengder U i $\mathbb{R}$ slik at $\text{diam } f(U) < 1/n$. Vis at $C(f) = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$.
- b) Forklar at hvis $C(f)$ er tett i $\mathbb{R}$, så er $C(f)$ en residuell mengde i $\mathbb{R}$. Eksisterer det en funksjon f slik at $C(f) = \mathbb{Q}$?
- c) La spesielt f være gitt ved at $f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}$ når m og n er hele tall uten felles faktor, med $n > 0$, og $f(x) = 0$ når x er irrasjonal. Vis at da er $C(f) = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Hvis C er et tellbart snitt av åpne, tette mengder i $\mathbb{R}$, fins det da alltid en f slik at $C(f) = C$?

Oppgave 2.

I den reelle tallmengden $\mathbb{R}$ kan vi benytte intervallene $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ for $a, b \in \mathbb{R}$ og $a < b$, som basis for en topologi. Det topologiske rommet vi får definert på denne måten, betegner vi med $\mathbb{R}_s$.

- a) Bestem sammenhengskomponentene til $\mathbb{R}_s$. Bruk dette til å avgjøre hvilke funksjoner $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_s$ som er kontinuerte.

(Fortsettes side 2.)

- b) Vis at i $\mathbb{R}_s$ er én av de to mengdene $B = \{-1, -1/2, -1/3, \dots, 0\}$ og $C = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 0\}$ kompakt og én ikke kompakt. Avgjør om $\mathbb{R}_s$ er lokalt kompakt.
- c) I produktrommet $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$ ser vi på linjene $L_k = \{(x, y) : y = kx\}$ for $-\infty < k < \infty$. Er L_k lukket i $\mathbb{R}_s \times \mathbb{R}_s$? Hvilke av underrommene L_k er innbyrdes homeomorfe?

Oppgave 3.

- a) Anta at W er et lineært underrom av et normert vektorrom V . Avstanden fra et punkt $x \in V$ til W er gitt ved $d(x, W) = \inf_{w \in W} \|x - w\|$. Vis at da gjelder $d(rx + w, W) = |r|d(x, W)$ for $r \in \mathbb{R}$ og $w \in W$.
- b) Forklar hva som menes med at to normer i et vektorrom er ekvivalente. Vis at ethvert normert vektorrom av endelig dimensjon er komplett.
- c) Anta at W er et lineært underrom av endelig dimensjon i et normert vektorrom V . Vis at W er lukket i V . Vis at for hvert punkt $x \in V$ eksisterer det et punkt $y \in W$ slik at $d(x, W) = \|x - y\|$.
- d) La V være et normert vektorrom som er lokalt kompakt. Vis at da er V av endelig dimensjon (F. Riesz's teorem).
Vink: Den lukkede enhetskula $B = \{v \in V : \|v\| \leq 1\}$ i V kan dekkes av et endelig antall åpne kuler i V med radius 1 og sentra $a_1, \dots, a_m \in V$. La W være det lineære underrommet i V utspent av $a_1, \dots, a_m$, og vis at $W = V$.

SLUTT