UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 245 — Generell topologi.
Eksamensdag:	Torsdag 10. desember 1998.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La X være et lokaltkompakt Hausdorff-rom med en tellbar basis $U_1, U_2, \ldots$ for topologien.

a) Vis at X har en basis $V_1, V_2, \ldots$ av åpne mengder med kompakt tillukning.

b) Vis at X kan skrives som en tellbar union av *voksende* kompakte delmengder $K_1, K_2, \ldots$, der hver K_i er inneholdt i det indre av K_{i+1}.

c) Gjør rede for at i ettpunktskompaktifikasjonen $X^* = X \cup \{\infty\}$ har det nye punkt ∞ en tellbar omegnbasis.

Oppgave 2.

La X og Y være kompakte metriske rom. La $f : X \to Y$ være en avbildning og la $\Gamma \subset X \times Y$ være grafen til f, bestående av alle par $(x, f(x))$, $x \in X$. Vis at f er kontinuerlig hvis og bare hvis Γ er lukket i $X \times Y$.

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

La $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være den komplekse funksjonen $f(z) = z^n$ der n er et positivt heltall. $\mathbb{C}$ har standardtopologien for $\mathbb{R}^2$.

a9 Vis at f er proper (altså at inversibildet av en kompakt delmengde er kompakt).

b) Vis at enhver proper kontinuerlig avbildning $\mathbb{C} \to /C$ er lukket.

c) Avgjør om f er åpen eller ikke. Begrunn svaret.

d) Inversbildene $f^{-1}\{w\}$, $w \in \mathbb{C}$, deler inn $\mathbb{C}$ i ekvivalensklasser.

La $\mathbb{C}/f$ være det korresponderende kvotientrommet. Vis at $\mathbb{C}/f$ er homeomorf med $\mathbb{C}$.

e) Dann den åpne mengden $U = \mathbb{C} - \mathbb{R}_1$ der $\mathbb{R}_1$ er den ikke-negative reelle halvaksen. Bestem sammenhengskomponentene til inversbildet $f^{-1}(U)$ og vis at de er homeomorfe med U selv.

Oppgave 4.

la P være vektorrommet av alle reelle polynomfunksjoner på intervallet $[-1, 1]$, og la P_n være underrommet av polynomer av grad $\leq n$. P er selv lineært underrom av det større funksjonsrommet C av *alle* kontinuerlige funksjoner på $[-1, 1]$, slik at vi har en følge av voksende lineære rom

$$P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \cdots \subset P \subset C.$$

I rommet C føre vi inn *supremumsnormen*

$$|f|_\infty = \sup_{-1 \leq t \leq 1} |f(t)|,$$

samt skalarproduktet

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$$

og den tilsvarende *middelnormen* $|f|_2$ gitt ved

$$|f|_2^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} f(t)^2 dt.$$

Disse arves ned på alle underrom.

a) Vis at C forsynt med supremumsnormen er komplett.
b) Avgjør om P og P_n med supremumsnormen er komplette.
c) Er C komplett med hensyn på middelnormen? Begrunn svaret.
d) Er P og P_n komplette med hensyn på middelnorment? Begrunn svaret.

SLUTT