UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT4500 — Topologi.
Eksamensdag:	Tirsdag 13. desember 2005.
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La $f : X \to Y$ være en avbildning mellom topologiske rom og A, B to delmengder av X slik at $X = A \cup B$ og $f|_A$ og $f|_B$ begge er kontinuerlige.

a) Vis at om A og B begge er åpne eller begge er lukkede, så er f kontinuerlig.

b) Er dette sant hvis A er lukket og B åpen?

Oppgave 2.

Avgjør om det fins en kontinuerlig funksjon $f : A \to \mathbb{R}$ slik at $f(A) = B$ i disse tre tilfellene:

i) $A = [0, 1]$, $\quad B = (0, 1)$

ii) $A = (0, 1)$, $\quad B = [-1, 1]$

iii) $A = [0, 1]$, $\quad B = [0, 1] \cup [2, 3]$

Svarene skal begrunnes. (A og B har standard topologi fra $\mathbb{R}$.)

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 3.

a) Vis at om $f : X \to Y$ er kontinuerlig og surjektiv, X er kompakt og Y er Hausdorff, så er f en identifikasjon.

b) Vis at det finnes identifikasjoner $D^2 \to S^1$, $S^2 \to D^2$ og $S^2 \to S^1$.

c) Vis at D^2 er homeomorf med $S^1 \times [0, 1]/\sim$, der vi identifiserer $S^1 \times \{0\}$ med et punkt, dvs. $(\vec{x}, t) \sim (\vec{x}', t')$ hvis $t = t' = 0$.

Oppgave 4.

Anta $(x, y) \in X \times Y$ og la C_x og C_y være sammenhengskomponentene til x i X og til y i Y. Vis at sammenhengskomponenten $C_{(x,y)}$ til (x, y) er $C_x \times C_y$.

Oppgave 5.

La $f : X \to Y$ være en kontinuerlig avbildning mellom topologiske rom og sett $A = f(X)$.

a) Vis at A er kompakt hvis X er kompakt og sammenhengende hvis X er sammenhengende.

b) Vis at A er veisammenhengende hvis X er det.

c) Vis at A er lokalt kompakt hvis X er lokalt kompakt og f dessuten er åpen.

Du skal utføre bevisene.

SLUTT