

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT3500/4500 — Topologi.
Eksamensdag: Tirsdag 19. desember 2006.
Tid for eksamen: 9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.
Vedlegg: Ingen.
Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

Gi raske svar på følgende spørsmål. Gi enten en kort begrunnelse eller et moteksempel, med unntak for b).

- a) I et metrisk rom er en ekte delmengde som er komplett også kompakt.
- b) Et punkt x er tilkkningspunkt for en delmengde A av et topologisk rom X hvis og bare hvis det finnes en følge av elementer fra A som konvergerer mot x . (Her trenger du hverken bevis eller moteksempel, bare en kort kommentar.)
- c) En kompakt delmengde av et metrisk rom er alltid begrenset og lukket.
- d) Hvis X er et lokalt sammenhengende, kompakt rom, har X alltid et endelig antall sammenhengskomponenter.
- e) Er en punktvis grense for kontinuerlige funksjoner fra $[0,2]$ til $[0,1]$ alltid kontinuerlig?

(Fortsettes side 2.)

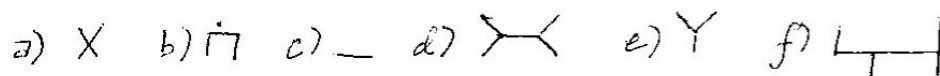
Oppgave 2.

Den kofinite topologien på \mathbb{R} har som åpne mengder den tomme mengden, hele \mathbb{R} og alle mengder med endelig komplement. (Du behøver ikke å vise at dette blir en topologi.)

- Vis at de rasjonale tall ikke utgjør en lukket mengde i denne topologien.
- Vis at de rasjonale tall utgjør en kompakt mengde i denne topologien.
- Avgjør om denne topologien er Hausdorff.

Oppgave 3.

Vi betrakter delmengder av \mathbb{R}^2 angitt ved følgende figurer:



Alle linjestykker er åpne. Avgjør hvilke av disse som er homeomorfe.

Oppgave 4.

La X være et kompakt Hausdorff rom og C mengden av kontinuerlige, reelle funksjoner på X . En delmengde F av C sies å være ekvikontinuerlig hvis for enhver x i X og ethvert $\epsilon > 0$, det eksisterer en omegn U om x slik at $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ for y i U og f i F . Vi betrakter for F og C topologien for uniform konvergens på X .

- Vis at C har en tellbar omegnsbasis (tilfredsstiller 1. tellbarhetsaksjom).
- (noe vanskelig)
Vis at når F er ekvikontinuerlig, faller topologien for punktvis konvergens og topologien for uniform konvergens sammen på F .
- Hvorfor blir enhver punktvis grense for en ekvikontinuerlig familie av funksjoner selv kontinuerlig?

SLUTT