UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MAT3500/4500 — Topologi.
Eksamensdag:	Tirsdag 18. desember 2007.
Tid for eksamen:	9.00 – 12.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La (X, τ) være et topologisk rom, $A \subset X$ en delmengde. Et punkt $x \in X$ kalles et *grensepunkt* til A hvis hver omegn om x inneholder et punkt i A som er forskjellig fra x.

a) Finn alle grensepunkter til delmengden $\mathbb{N} \cup (0, 1)$ av $\mathbb{R}$, der $\mathbb{N}$ betegner de naturlige tall.

b) Vis at A er lukket hvis og bare hvis A inneholder alle sine grensepunkter.

Oppgave 2.

La (X, d) være et kompakt metrisk rom.

a) Vis at hver kontinuerlig reell funksjon på X er uniformt kontinuerlig.

(Fortsettes side 2.)

b) La $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ være en følge av kontinuerlig reelle funksjoner på X slik at $f_1(x) \geq f_2(x) \geq \cdots \geq f_n(x) \geq \cdots$ og $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ for alle $x \in X$.

Vis at (f_n) konvergerer uniformt mot 0. (Dette er Dinis teorem.)

Oppgave 3.

La (X, τ) være et topologisk rom.

a) Gi definisjonen av at (X, τ) er Hausdorff.

b) Hvis X er Hausdorff og $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ et konvergent nett i X, vis at (x_α) har en entydig grense.

c) Vis at hvis hvert konvergende nett i X har en entydig grense, så er X Hausdorff.

Oppgave 4.

a) La U og V være åpne delmengder av $\mathbb{R}^n$. Vis at $U \cap V$ er kompakt hvis og bare hvis $U \cap V = \emptyset$.

b) Kan snittet av et uendelig antall åpne delmengder av $\mathbb{R}^n$ være en ikke-tom kompakt mengde?
(Gi bevis eller et eksempel for konklusjonen din.)

Oppgave 5.

La (X, τ) være et topologisk rom. Gi definisjonen for når en delmengde $B \subset X$ er sammenhengende, og vis at hvis B er sammenhengende så er tillukningen til B sammenhengende.

SLUTT