UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	MAT4500 — Topologi
Eksamensdag:	Tirsdag 16. desember, 2008
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert delspørsmål (1, 2, 3, 4, 5a, 5b osv.) teller 10 poeng.

Oppgave 1

La $X = \{a, b\}$ være en mengde med to elementer. Beskriv alle topologier på X. Hvilke av disse topologiene er Hausdorff? (I denne oppgaven behøver du ikke grunngi svarene dine.)

Oppgave 2

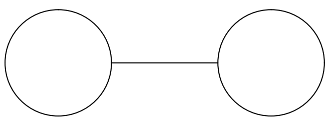
Anta at X er et topologisk rom og at det for hvert par av punkter $x, y \in X$, $x \neq y$, finnes en kontinuerlig funksjon $f : X \to \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$, $f(y) = 1$. Vis at X er et Hausdorff-rom.

Oppgave 3

La X være et topologisk rom, A en delmengde av X og x_0 et punkt i A. Inklusjonsavbildningen $i : A \to X$ induserer en homomorfi $i_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$. Vis ved eksempler at i_* ikke behøver å være injektiv eller surjektiv.

Oppgave 4

La X være delrommet av $\mathbb{R}^2$ som består av sirklene med radius 1 og sentrum i henholdsvis $(-2, 0)$ og $(2, 0)$ samt linjestykket fra $(-1, 0)$ til $(1, 0)$ (se figuren). Bevis at X har samme fundamentalgruppe som det dobbeltpunkterte planet (dvs. et plan der to punkter er fjernet).



Du behøver ikke skrive ned formler for de hjelpefunksjonene (homotopier, retraksjoner, deformasjonsretraksjoner osv.) som du bruker — det holder å beskrive dem med ord og tegninger.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 5

I denne oppgaven er A en endelig mengde og $X = A^{\mathbb{N}}$. Vi skal skrive elementene i X som $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Hvis $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ er et n-tuppel av elementer fra A, lar vi

$$O_a = \{\mathbf{x} \in X \mid x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots \text{ og } x_n = a_n\}$$

a) Vis at familien av alle mengder O_a (der a er et n-tuppel av en hvilken som helst lengde n) danner en basis for en topologi $\mathcal{T}$ på X. (*Hint*: Hvis $O_a \cap O_b \neq \emptyset$, så er enten $a = b$ eller en av sekvensene a, b er en forlengelse av den andre).

b) Vis at $\mathcal{T}$ er Hausdorff.

c) Vis at mengdene O_a er lukkede i tillegg til åpne, og bruk dette til å vise at X er totalt usammenhengende (dvs. at de eneste sammenhengende mengdene i X er ettpunktsmengdene $\{\mathbf{x}\}$).

d) Vis at de eneste kontinuerlige avbildningene $f : \mathbb{R} \to X$ er konstant-avbildningene.

Oppgave 6

a) Vis at i et Hausdorff-rom er snittet av to kompakte mengder kompakt.

b) La $X = [0, 1]$ og la $\mathcal{T}$ være samlingen av delmengder av X definert ved:

$$A \in \mathcal{T} \iff \begin{cases} A \subset (0,1) \text{ eller} \\ \\ A \text{ er kofinit (dvs. } A^c \text{ er endelig eller tom)} \end{cases}$$

Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi.

La $C_1 = [0, 1)$, $C_2 = (0, 1]$. Vis at C_1 og C_2 er kompakte, men at $C_1 \cap C_2$ ikke er kompakt.

SLUTT