# UNIVERSITETET I OSLO

## Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

| | |
|---|---|
| Eksamen i | MAT3500/4500 — Topologi. |
| Eksamensdag: | Tirsdag 15. desember, 2009. |
| Tid for eksamen: | 09.00 – 12.00. |
| Oppgavesettet er på 2 sider. | |
| Vedlegg: | Ingen. |
| Tillatte hjelpemidler: | Ingen. |

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Hvert delspørsmål (1, 2, 3, 4a, 4b osv.) teller 10 poeng.

## Oppgave 1

La $X = \{a, b, c\}$, der $a, b$ og $c$ er forskjellige elementer. Er

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

en topologi på $X$? Begrunn svaret.

## Oppgave 2

Anta at $X$ er et topologisk rom, $Y$ er et Hausdorffrom og $f : X \to Y$ er en injektiv, kontinuerlig funksjon. Vis at $X$ er et Hausdorffrom.

## Oppgave 3

Anta at $X, Y, Z$ er topologiske rom, og gi $Y \times Z$ produkttopologien. Vis at dersom $f : X \to Y$ og $g : X \to Z$ er kontinuerlige, så er funksjonen $h : X \to Y \times Z$ definert ved

$$h(x) = (f(x), g(x))$$

kontinuerlig.

## Oppgave 4

I denne oppgaven er $X = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (der $\infty$ er et element forskjellig fra alle tallene $1, 2, 3, \ldots$ i $\mathbb{N}$). En mengde $A \subset X$ kalles *kofinit* dersom komplementet $A^c = X - A$ er endelig (eller tomt).

*(Fortsettes på side 2.)*

a) En familie $\mathcal{T}$ av delmengder av $X$ består av alle delmengder av $\mathbb{N}$ samt alle kofinite delmengder av $X$. Vis at $\mathcal{T}$ er en topologi på $X$.

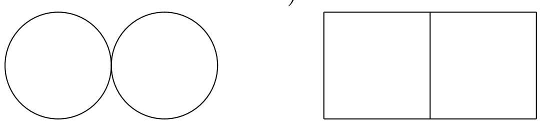
b) Vis at $(X, \mathcal{T})$ er kompakt

c) Vis at en funksjon $f : X \to \mathbb{R}$ er kontinuerlig hvis og bare hvis $\lim_{n\to\infty} f(n) = f(\infty)$

## Oppgave 5

Figuren nedenfor viser to delmengder av $\mathbb{R}^2$. Den første mengden $X$ består av to kopier av $S^1$ som berører hverandre i ett punkt (se punkt a) på figuren). Den andre mengden $Y$ består av syv like lange linjestykker som danner to kvadrater som møtes langs en kant (se punkt b) på figuren). Vis at $X$ og $Y$ er homotopiekvivalente, og finn to funksjoner $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ som er homotopiinverser av hverandre.

a) b)



Du behøver ikke skrive ned formler for funksjonene du bruker — det holder å beskrive dem med ord og tegninger.

## Oppgave 6

I denne oppgaven er $X$ et Hausdorffrom, $K \subset X$ er kompakt, og $x_0 \in X$ er *ikke* et element i $K$.

a) Vis at det finnes en åpen mengde $O$ slik at $K \subset O$ og $x_0 \notin O$.

Anta at $H : X \times [0,1] \to X$ er er en kontinuerlig funksjon slik at for alle $x \in X$ er $H(x,0) = x$ og $H(x,1) = x_0$ ($H$ er altså en homotopi mellom identitetsfunksjonen $id_X$ og konstantfunksjonen med verdi $x_0$). La $O$ være en åpen mengde med egenskaper gitt i a). For alle $x \in X$ lar vi

$$t_x = \inf\{s \in [0,1] \mid H(x,s) \notin O\}$$

b) Vis at $t_x > 0$ for alle $x \in K$.

c) Anta at $x \in K$. Vis at $H^{-1}(O)$ er en åpen delmengde av $X \times [0,1]$ som inneholder $\{x\} \times [0, \frac{t_x}{2}]$. Vis at det finnes en omegn $O_x$ om $x$ slik at $O_x \times [0, \frac{t_x}{2}] \subset H^{-1}(O)$. Vis til slutt at det finnes et tall $t_K > 0$ slik at $t_x \geq t_K$ for alle $x \in K$.

SLUTT