

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i MAT4410 — Videregående lineær analyse.

Eksamensdag: Tirsdag, 17. desember, 2013.

Tid for eksamen: 9.00 – 13.00.

Oppgavesettet er på 3 sider.

Vedlegg: Ingen.

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Bemerk: alle svar må begrunnes!

Oppgave 1

1a

(10 poeng) Formuler prinsippet om uniform begrensethet for avbildninger fra et Banach rom til et normert rom.

1b

(10 poeng) La Ω være et normert vektorrom, og la $j : \Omega \rightarrow \Omega^{**}$ være avbildningen gitt ved $j(x)(\varphi) := \varphi(x)$ for alle $x \in \Omega$ og $\varphi \in \Omega^*$. Vis at j er en lineær isometri.

1c

(10 poeng) La A være en delmengde av det normerte rommet Ω , og antar at $\sup\{|\varphi(a)| \mid a \in A\}$ er begrenset for hvert $\varphi \in \Omega^*$. Vis at A er begrenset, med andre ord at det fins $C > 0$ slik at $\sup\{\|a\| \mid a \in A\} \leq C$.

1d

(10 poeng) La Ω og Λ være normerte rom og $T : \Omega \rightarrow \Lambda$ være en lineær avbildning. Vi antar at $\varphi \circ T$ er kontinuertlig for hvert $\varphi \in \Lambda^*$. Vis at T er kontinuertlig.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

(10 poeng) La $(X, \|\cdot\|)$ være et Banachrom og la Y, Z være lukkede underrom av X slik at $X = Y + Z$ og $Y \cap Z = \{0\}$. For $x \in X$ på formen $x = y + z$, hvor $y \in Y$ og $z \in Z$, sett $\|x\|_1 = \|y\| + \|z\|$. Vis at $\|\cdot\|_1$ er en ny norm på X , og begrunn at det fins $C > 0$ slik at $\|x\|_1 \leq C\|x\|$ for alle $x \in X$.

Oppgave 3

La $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ være et endeligt målrom, og antar at $\mathcal{A}_0$ er en σ -algebra av delmengder av Ω slik at $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ (med andre ord, $A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$).

3a

(5 poeng) Betegn ν_1 det nye målet $\mu|_{\mathcal{A}_0}$. (Du trenger ikke vise at dette er et mål). Vis at

$$\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} g d\nu_1$$

for alle $\mathcal{A}_0$ -målbare funksjoner $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$.

3b

(5 poeng) Hvis $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ er i $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, la ν_2 være målet på $\mathcal{A}_0$ gitt ved $\nu_2(A) = \int_A f d\mu$ for $A \in \mathcal{A}_0$. Vis at $\nu_2 \ll \nu_1$.

3c

(10 poeng) Med notasjon som i punktene 3a og 3b, vis at det fins $h \in L^1(\Omega, \mathcal{A}_0, \nu_1)$, h ikke-negativ, slik at

$$\int_{\Omega} fg d\mu = \int_{\Omega} gh d\mu$$

for alle $\mathcal{A}_0$ -målbare funksjoner $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$. Vis at funksjonen h er entydig ν_1 -n.o.

Oppgave 4

Betrakt målrommet bestående av $\mathbb{R}$ med Lebesguemålet λ på Borel σ -algebraen $\mathcal{B}$. La $1 < p < \infty$, og antar at $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ og $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$. For $x \in \mathbb{R}$, sett $(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x - y)f(y) d\lambda(y)$, og sett $h(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(x - y)f(y)| d\lambda(y)$.

(Fortsettes på side 3.)

4a

(10 poeng) Forklar hvorfor h er Borel målbar. La q være det positive tallet slik at $1/p + 1/q = 1$. Vis at for enhver funksjon $k \in L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ slik at $\|k\|_q \leq 1$, det gjelder at

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)k(x) d\lambda(x) \right| \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

(Vink: Bruk Tonelli og Hölder's ulighet.)

4b

(10 poeng) Begrunn at $h \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ og

$$\|h\|_p = \sup\left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)k(x) d\lambda(x) \right| \mid \|k\|_q \leq 1 \right\}.$$

4c

(10 poeng) Konkluder at $\|g * f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$.

SLUTT