9. oktober 2025

MAT4410

Obligatorisk oppgave 1 av 1

Innleveringsfrist

Torsdag 30. oktober 2025, klokken 14:30 i Canvas (canvas.uio.no).

Instruksjoner

Merk at man har **ett forsøk** på å få oppgaven godkjent. Dette betyr at det ikke lenger gis andregangsforsøk.

Du velger selv om du skriver besvarelsen for hånd og scanner besvarelsen eller om du skriver løsningen direkte inn på datamaskin (for eksempel ved bruk av LaTeX). Besvarelsen skal leveres som én PDF-fil. Scannede ark må være godt lesbare. Besvarelsen skal inneholde navn, emne og oblignummer.

Det forventes at man har en klar og ryddig besvarelse med tydelige begrunnelser. Husk å inkludere alle relevante plott og figurer. Samarbeid og alle slags hjelpemidler er tillatt, men den innleverte besvarelsen skal være skrevet av deg og reflektere din forståelse av stoffet. Er vi i tvil om du virkelig har forstått det du har levert inn, kan vi be deg om en muntlig redegjørelse.

I oppgaver der du blir bedt om å programmere må du legge ved programkoden og levere den sammen med resten av besvarelsen. Det er viktig at programkoden du leverer inneholder et kjøreeksempel, slik at det er lett å se hvilket resultat programmet gir.

Søknad om utsettelse av innleveringsfrist

Hvis du blir syk eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse av innleveringsfristen, må du ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (e-post: studieinfo@math.uio.no) senest samme dag som innleveringsfristen.

For å få adgang til avsluttende eksamen i dette emnet, må man bestå alle obligatoriske oppgaver i ett og samme semester.

For fullstendige retningslinjer for innlevering av obligatoriske oppgaver, se her:

www.uio.no/studier/admin/obligatoriske-aktiviteter/mn-math-oblig.html

LYKKE TIL!

Kravet til å få obligen godkjent er å besvare tre av de syv spørsmål, fordelt på 5 oppgaver, etter fritt valg.

Oppgave 1. La H være et Hilbertrom, la M være et ikke-null endelig dimensjonalt underrom av H og N være et ikke-null lukket underrom av H slik at $\dim(M) < \dim(N)$. Vis at $(I - P_M)P_N \neq 0$.

Oppgave 2. Lar H være et uendelig dimensjonalt Hilbertrom og lar T være en kompakt, selvadjungert operator på H, hvor $T \neq 0$. Forklar hvorfor $T(H)$ består av vektorer på formen

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \alpha_j w_j,$$

hvor $\{\lambda_j\}_j$ er egenverdier for T og $\{w_j\}_j$ er tilhørende egenvektorer som danner en ortonormal basis for $\overline{T(H)}$. Vis at såfremt $T(H)$ er uendelig dimensjonalt, da er $T(H)$ ikke et lukket underrom av H.

Oppgave 3. La H være et uendelig dimensjonalt Hilbertrom og la T være en kompakt operator på H, hvor $T \neq 0$.

(a) Vis at det eksisterer $\varepsilon > 0$ slik at

$$\|(I - T)x\| \geq \varepsilon \|x\|$$

for alle $x \in (\ker(I - T))^{\perp}$.

(b) Bruk (a) til å vise at $(I - T)(H)$ er lukket i H. Vis også, at $((I - T)(H))^{\perp} = \{0\}$ såfremt 1 ikke er en egenverdi av T.

Oppgave 4. La H være et separabelt Hilbertrom og $S, T \in B(B)$.

(a) Antar at det finnes en ortonormal basis for H hvori ethvert element er en egenvektor for både S og T. Vis at $ST = TS$.

(b) Vis at såfremt $S, T \in K(H)$ er selv-adjungerte og $ST = TS$, da har H en ortonormal basis av egenvektorer felles for S og T. (Vink: Hvis $\lambda \in \sigma_p(T)$, $\lambda \neq 0$, betrakt mengden av alle $S(u)$ hvor $u \in E_\lambda(T)$. Husk at en kompakt, selv-adjungert ikke-null operator definert på et lukket underrom E av H har en egenverdi, og dermed en egenvektor, i E. Bruk dette til å finne felles egenvektorer for S, T.)

Oppgave 5. Betrakt Hilbertrommet $H = L^2([0,1])$ med hensyn på Lebesguemålet. La $T_\kappa : H \to H$ være integraloperatoren med kjerne

$$K(s,t) = \min(s,t),$$

for alle $(s,t) \in [0,1] \times [0,1]$.

Det er kjent, at T_K er kompakt og selv-adjungert. Finn en orthonormal mengde $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ av egenvektorer for T_K. For eksempel, vis at en løsning $f \in C^2[0,1]$ til $T_K f = rf$ må tilfredstille $rf''(x) = -f(x)$, $f(0) = 0, f'(1) = 0$.