

Oppgave 1.

La $P_M : H \rightarrow H$ være den ortogonale projeksjonen på M , og tilsvarende $P_N : H \rightarrow H$ være projeksjonen på N . Gitt $x \in H$, vi vet at $P_M(x) = x_M + x_{M^\perp}$, hvor $x_M \in M$ er beste approksimasjon til x i underromet M . Merk at mengden $P_M(N)$ er et underrom av H som er lik med $\{x_M \mid x \in N\}$. Siden M er endelig dimensjonalt, er $P_M(N)$ også endelig dimensjonalt, og siden $\dim(M) < \dim(N)$ eksisterer det $x \in N$ slik at $x \neq x_M$, så $x_{M^\perp} \neq 0$. Dette betyr, at

$$(I - P_M)P_N x = (I - P_M)x = x_{M^\perp} \neq 0,$$

hvilket medfører påstanden i oppgaven.

Oppgave 2. La T være kompakt og selv-adjungert på et uendelig dimensjonalt Hilbertrom. Av spektralteoremet for kompakte, selvadjungerte operatorer, finnes det en følge $\{\lambda_j\}_j$ av egenverdier til T og en følge $\{w_j\}_j$ slik at w_j er en egenvektor hørende til egenverdien λ_j , for hvert j , og i tillegg danner $\{w_j\}_j$ en ortonormal basis for $\overline{T(H)}$. Det gjelder, at for hver $x \in H$ er

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x, w_j \rangle w_j,$$

som er på den ønskede form siden $\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j \langle x, w_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$. Omvendt, vi lar nu $y = \sum_j \lambda_j \alpha_j w_j$, hvor $\sum_j |\alpha_j|^2 < \infty$. Det følger av denne antakelsen at vi kan definere $x \in H$ ved $x = \sum_{j \geq 1} \alpha_j w_j$. Av kontinuitet av T er

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \lambda_j w_j = y.$$

Vi antar nu, at $T(H)$ er uendelig dimensjonalt. Vi skal vise, at $T(H)$ er et ekte underrom av $\overline{T(H)}$. Det holder å vise eksistens av et $y \in \overline{T(H)} \setminus T(H)$. Av spektralteoremet danner $\{\lambda_j\}_j$ en (uendelig) følge som konvergerer mot 0. Av første del av oppgaven er det nok å finne en tallfølge $\{\alpha_j\}_{j \geq 1}$ slik at

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k \lambda_k|^2 < \infty$$

mens $\sum_k |\alpha_k|^2$ ikke konvergerer. Vi kan for hvert $j \geq 1$ finne $n_j > j$ slik at

$$|\lambda_{n_j}| < \frac{1}{\sqrt{j}}$$

og, i tillegg, $n_{j+1} > n_j$. Dette gir en følge $n_j \rightarrow \infty$ for $j \rightarrow \infty$. Sett

$$\alpha_{n_j} := \frac{1}{\sqrt{n_j}} \text{ og } y_m = \sum_{j=1}^m \alpha_{n_j} \lambda_{n_j} w_{n_j}, m \geq 1.$$

Da er $\{y_m\}_m \subset T(H)$, men $\lim_{m \rightarrow \infty} y_m \notin T(H)$ siden $\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{n_j}|^2$ dominerer den divergente rekken $\sum_j \frac{1}{n_j}$.

Oppgave 3.

For å vise (a), vi antar at påstanden ikke gjelder. Dette sier, at vi kan velge en følge $\{x_n\}_{n \geq 1}$ i $(\ker(I - T))^\perp$ slik at $\|(I - T)x_n\| < \frac{1}{n}\|x_n\|$. Ved å erstatte x_n med $\|x_n\|^{-1}x_n$, antar vi at $\|x_n\| = 1$ for hver $n \geq 1$. Vi får dermed, at følgen $\{Tx_n - x_n\}_{n \geq 1}$ konvergerer med grense lik 0. Siden T er kompakt, finnes det en delfølge $\{x_{n_k}\}_k$ slik at

$$\{Tx_{n_k}\}_{k \geq 1} \text{ konvergerer.}$$

I alt får vi, at $\{x_{n_k}\}_k$ og $\{Tx_{n_k}\}_k$ begge konvergerer, mot nødvendigvis samme grense, kall dette x . Siden $\{x_{n_k}\}_k$ er inneholdt i $(\ker(I - T))^\perp$, som er et lukket underrom av H , får vi $x \in (\ker(I - T))^\perp$. Samtidig,

$$(I - T)x = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - Tx_{n_k}) = 0,$$

som medfører $x \in \ker(I - T) \cap (\ker(I - T))^\perp$, altså gjelder $x = 0$. Dette er en motstrid, siden $\|x\| = \lim \|x_{n_k}\| = 1$. Vi konkluderer med at det eksisterer $\varepsilon > 0$ slik at $\|(I - T)x\| \geq \varepsilon\|x\|$ for alle $x \in (\ker(I - T))^\perp$.

For å vise utsagn (b), la $\{y_n\}_{n \geq 1}$ være en følge i $(I - T)(H)$ som konvergerer mot et y i H . Vi trenger å vise, at $y \in (I - T)(H)$. For hvert $n \geq 1$ finner vi et x_n i H slik at $y_n = (I - T)x_n$. Siden $(\ker(I - T))^\perp$ er et lukket underrom, for $n \geq 1$ kan vi skrive $x_n = z_n + w_n$ med $z_n \in \ker(I - T)$ og $w_n \in (\ker(I - T))^\perp$. Dette medfører

$$y_n = (I - T)x_n = (I - T)(z_n) + (I - T)(w_n) = (I - T)w_n,$$

for hver $n \geq 1$. Ved bruk av (a), ser vi at $\|w_n - w_m\| \leq \varepsilon^{-1}\|y_n - y_m\|$ for alle $n, m \geq 1$, så følgen $\{w_n\}_n$ er Cauchy siden $\{y_n\}$ er Cauchy (da den er konvergent). Det følger at $\{w_n\}$ er konvergent mot en grense $w \in H$. Vi konkluderer, at $(I - T)w = \lim_n (I - T)(w_n) = \lim_n y_n = y$, som beviser at $(I - T)H$ er lukket.

Vi antar nu, at $\ker(I - T) = \{0\}$, som betyr at 1 ikke er en egenverdi til T . Vi skal vise, at $((I - T)(H))^\perp = \{0\}$.

La $M = (I - T)(H)$, som vi vet er et lukket underrom av H . Antar at $M^\perp \neq \{0\}$. Det finnes $x_1 \in M^\perp$, $x_1 \neq 0$, og vi kan anta $\|x_1\| = 1$. Sett $y = (I - T)x_1 \in M$. Siden M er lukket, er også $N := (I - T)(M)$ lukket. Vi har en entydig dekomposisjon over $H = N \oplus N^\perp$

$$y = (I - T)y_1 + x_2,$$

hvor $y_1 \in M$ og $x_2 \in N^\perp$. Da er $x_2 = (I - T)(x_1 - y_1) \in M$. I tilfelle at $x_2 = 0$ vil $(I - T)(x_1 - y_1) = 0$, og av antakelsen om kjernen vil dette medfølge, at $x_1 - y_1 = 0$, som er umulig siden $y_1 \in M$ og $x_1 \in M^\perp \setminus \{0\}$. Dermed er $x_2 \neq 0$ og $x_2 \in N^\perp \cap M$. Vi kan anta $\|x_2\| = 1$. Nu bruker vi Pythagoras, hvor $x_1 \in M^\perp$ og det resterende leddet er i M , og får

$$\|Tx_2 - Tx_1\|^2 = \|x_1 - (x_2 - (I - T)(x_2) - (I - T)(x_1))\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \geq 1.$$

Ved induksjon danner vi en følge av lukkede underrom $(I - T)^n(M)$ som er avtagende, nemlig $(I - T)^{n+1}(H) \subset (I - T)^n(H)$, og en følge $\{x_n\}_n$ av enhetsvektorer slik at $\{Tx_n\}$ ikke kan ha noen konvergent delfølge. Siden $\{x_n\}$ er begrenset, er dette i motstrid med antakelsen om at T er kompakt.

Vi konkluderer, at $((I - T)(H))^\perp = \{0\}$, som var det vi skulle vise.

Oppgave 4. (a) La $\{u_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ være en ortonormal basis for H bestående av felles egenvektorer til operatorene S, T i $B(H)$. Antar, at $Su_j = \rho_j u_j$ og $Tu_j = \lambda_j u_j$ for hvert $j \geq 1$. Da er

$$STu_j = S(\lambda_j u_j) = \lambda_j \rho_j u_j = \rho_j \lambda_j u_j = T(\rho_j u_j) = TSu_j$$

for alle $j \geq 1$. Siden $\{u_j\}_j$ er en ortonormal basis og S, T er begrenset, det følger at $ST = TS$.

For (b), antar at S, T er kommuterende selvadjungerte kompakte operatorer. Vi skal vise at det finnes en ortonormal basis til H bestående av felles egenvektorer til S og T .

La λ være en egenverdi til T slik at $\lambda \neq 0$ og la $E_\lambda(T) = \ker(T - \lambda I)$ være tilhørende egenrom. (Tilfellet $T = 0$, eller $\ker(T) = H$, løses ved å velge en ortonormal basis for S .) For hver $u \in E_\lambda(T)$ har vi, at

$$Su = \lambda^{-1}(S(\lambda u)) = \lambda^{-1}(STu) = \lambda^{-1}(TSu),$$

så $Su \in E_\lambda(T)$. Dette sier, at $E_\lambda(T)$ er et invariant underrom for S , så vi kan betrakte restriksjonen, som fortsatt er en kompakt-selvadjungert operator,

$$S|_{E_\lambda(T)} : E_\lambda(T) \rightarrow E_\lambda(T).$$

Antar, at $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ er en enumerering av alle distinkte ikke-null egenverdiene til T . Sett $E_k := E_{\lambda_k}(T)$ for $k \geq 1$. Ved anvendelse av spektralteoremet på S_k , restriksjonen av S til underrommet E_k , kan vi velge en ortonormal basis $\mathcal{B}_k$ for E_k bestående av egenvektorer til S_k , som er egenvektorer for både S (da S_k er restriksjonen av S) og for T (da ikke-null elementer i E_k er egenvektorer til T). Da er unionen $\mathcal{E} := \cup_k \mathcal{B}_k$ en ortonormal basis for $\overline{T(H)}$. I tilfelle av, at $\ker(T) = 0$ er $\mathcal{E}$ en ortonormal basis for H med ønsket egenskap. Antar, at $\ker(T) \neq \{0\}$. Det gjenstår å finne en ortonormal basis $\mathcal{E}'$ for $\ker(T)$ som består av egenvektorer til S . For $x \in \ker(T)$ er $TSx = STx = 0$, så $Sx \in \ker(T)$. Dermed er $\ker(T)$ også invariant for S og vi kan finne en slik $\mathcal{E}'$ av spektralteoremet anvendt på restriksjonen av S til $\ker(T)$.

Oppgave 5. Det er gitt, at $T_K : H \rightarrow H$, for $H = L^2([0, 1])$ og $K(s, t) = \min(s, t)$ for alle $(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1]$. Vi skal finne en ortonormal mengde av egenvektorer hørende til integral operatoren T_K med kjerne K . Siden K er symmetrisk, er T_K kompakt og selvadjungert. Spektralteoremet sier, at egenverdiene til T_K danner en uendelig følge av reelle tall, med 0 som grense. For å finne egenvektorer, vi løser $T_K f = r f$ under antakelse at $f \in C^2[0, 1]$ (vi utnytter, at $C^2[0, 1]$ er et tett underrom av H). At $T_K f = r f$ gir ekvivalensene

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \min(x, y) f(y) dy = r f(x), \text{ for hvert } x \in [0, 1]; \\ (1) \quad & \int_0^x y f(y) dy + x \int_x^1 x f(y) dy = r f(x), \text{ for hvert } x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ved å derivere begge sider av (1) får vi ligningen

$$(2) \quad r f'(x) = \int_x^1 f(y) dy,$$

og ved å derivere på nytt får vi $rf''(x) = -f(x)$, hvor $x \in [0, 1]$. Tilfellet $r = 0$ fører til løsningen $f(x) = 0$ for alle $x \in [0, 1]$, som sier at $\ker(T_K) = \{0\}$ og utelukker 0 som egenverdi. Vi kan anta, at $r \neq 0$. Ved å sette verdien $x = 0$ i (1) får vi betingelsen $f(0) = 0$, og av ligningen (2) får vi $f'(1) = 0$. I alt skal vi løse

$$u'' + \frac{1}{r}u = 0, u(0) = u'(1) = 0.$$

Den karakteristiske ligningen har en dobbelt rot.

Tilfellet $r < 0$ resulterer i dobbelt rot $r = (\sqrt{-r})^{-1}$ og generell løsning $u(x) = Ae^{rx} + xBe^{rx}$. Løser vi denne med de initielle betingelsene gir $A = B = 0$, som er den trivielle løsningen, og dermed ikke en egenvektor. Tilbake er tilfellet $r > 0$, hvor vi får den generelle løsningen

$$u(x) = C_1 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{r}}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{r}}x\right).$$

Løser vi denne under betingelsene gir $C_1 = 0$ og for å utelukke $C_2 = 0$ må vi ha, at

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Etter normalisering, får vi det ortonormale systemet

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left((2k + 1)\frac{\pi}{2}\right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$