

**Oppgave 1.**

1a. Formuler prinsippet om uniform begrensethet for avbildninger fra et Banach rom til et normert rom.

1b. La  $\Omega$  være et normert vektorrom, og la  $j : \Omega \rightarrow \Omega^{**}$  være avbildningen gitt ved  $j(x)(\varphi) := \varphi(x)$  for alle  $x \in \Omega$  og  $\varphi \in \Omega^*$ . Vis at  $j$  er en lineær isometri.

Denne deloppgaven er fra McDonald og Weiss.

1c. La  $A$  være en delmengde av det normerte rommet  $\Omega$ , og antar at  $\sup\{|\varphi(a)| \mid a \in A\}$  er begrenset for hvert  $\varphi \in \Omega^*$ . Vis at  $A$  er begrenset, med andre ord at det fins  $C > 0$  slik at  $\sup\{\|a\| \mid a \in A\} \leq C$ .

Løsning: Siden  $\Omega^*$  er et Banachrom og  $T_a : \varphi \mapsto \varphi(a)$  er en familie av lineære avbildninger fra  $\Omega^*$  til  $\mathbb{C}$  slik at  $\{T_a(\varphi) \mid a \in A\}$  er punktvis begrenset for hvert  $\varphi \in \Omega^*$ , P.U.B. gir at  $\{\|T_a\| \mid a \in A\}$  er begrenset. Med andre ord, det fins  $C > 0$  slik at (s.a.)  $\|T_a\| \leq C$  for alle  $a \in A$ . Men  $\|T_a\| = \|j(a)\|$ , som er lik  $\|a\|$  ifølge (a).

1d. La  $\Omega$  og  $\Lambda$  være normerte rom og  $T : \Omega \rightarrow \Lambda$  være en lineær avbildning. Vi antar at  $\varphi \circ T$  er kontinuert for hvert  $\varphi \in \Lambda^*$ . Vis at  $T$  er kontinuert.

Løsning: Det er nok å vise at  $T$  er kontinuert i 0. La  $x_n \rightarrow 0$  i  $X$ . Antar at  $Tx_n$  ikke konvergerer mot 0 i  $Y$ . Det fins da  $M > 0$  slik at  $\forall n \geq 1, \exists N \geq n$  med  $\|Tx_N\| > M$ . Siden  $\varphi \circ T$  er kontinuert i 0 vi har  $\sup\{|\varphi(Tx_n)| \mid n \geq 1\} < \infty$  for hvert  $\varphi \in \Lambda^*$ . Av 1b følger det at det fins  $C > 0$  s.a.  $\|Tx_n\| \leq C$  for alle  $n \geq 1$ . Siden  $x_n \rightarrow 0$ , det fins for hvert  $\varepsilon > 0$  et positivt heltall  $n_\varepsilon$  s.a.  $\|x_n\| < \varepsilon$  for  $n \geq n_\varepsilon$ . For  $\varepsilon$  s.a.  $\varepsilon C < M$  og  $N \geq n_\varepsilon$  s.a.  $\|Tx_N\| > M$ , vi har  $M < \|Tx_N\| \leq C\|x_N\| < C\varepsilon < M$ , som er en motstrid.

**Oppgave 2.** La  $(X, \|\cdot\|)$  være et Banachrom og la  $Y, Z$  være lukkede underrom av  $X$  slik at  $X = Y + Z$  og  $Y \cap Z = \{0\}$ . For  $x \in X$  på formen  $x = y + z$ , der  $y \in Y$  og  $z \in Z$ , sett  $\|x\|_1 = \|y\| + \|z\|$ . Begrunn at det fins  $C > 0$  slik at  $\|x\|_1 \leq C\|x\|$ .

Løsning: Det ses lett at  $x \mapsto \|x\|_1$  er en ny norm på  $X$ . For å bruke den åpne avbildning teoremet skal det vises at  $X$  er et Banachrom med den nye normen  $\|\cdot\|_1$ : la  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  være en Cauchy følge, og skriv entydigt  $x_n = y_n + z_n$  for  $y_n \in Y$  og  $z_n \in Z$  for  $n \geq 1$ . Både  $Y$  og  $Z$  er Banachrom, siden de er lukkede underrom av et Banachrom, og det er nemt å verifisere at  $\{y_n\}$  og  $\{z_n\}$  begge er Cauchy følger. La  $y = \lim y_n$  og  $z = \lim z_n$ . Det følger at  $\lim x_n = y + z$  (trekantsulikhet og kontinuitet av normen). Siden identitetsoperatoren  $\text{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|)$  er begrenset, gir den åpne avbildning teoremet at også  $\text{Id}^{-1} :$

$(X, \|\cdot\|) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$  er begrenset. Derfra fins  $C > 0$  med ønskede egenskaper.

**Oppgave 3.** La  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  være et endeligt målrom, og antar at  $\mathcal{A}_0$  er en  $\sigma$ -algebra av delmengder av  $\Omega$  slik at  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  (med andre ord,  $A \in \mathcal{A}_0 \Rightarrow A \in \mathcal{A}$ ).

**Oppgave 3a.** Betegn  $\nu_1$  det nye målet  $\mu|_{\mathcal{A}_0}$ . (Du trenger ikke vise at dette er et mål). Vis at  $\int_{\Omega} g d\mu = \int_{\Omega} g d\nu_1$  for alle  $\mathcal{A}_0$ -målbare funksjoner  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ .

Løsning: Dette er standard bootstrap argument.

**Oppgave 3b.** Hvis  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  er i  $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , la  $\nu_2$  være målet på  $\mathcal{A}_0$  gitt ved  $\nu_2(A) = \int_A f d\mu$  for  $A \in \mathcal{A}_0$ . Vis at  $\nu_2 \ll \nu_1$ .

Løsning: La  $A \in \mathcal{A}_0$  s.a.  $\nu_1(A) = 0$ . Da er  $f\chi_A = 0$   $\mu$ -n.o., og  $\nu_2(A) = \int f\chi_A d\mu = 0$ .

**Oppgave 3c.** Med notasjon som i punktene 3a og 3b, vis at det fins  $h \in L^1(\Omega, \mathcal{A}_0, \nu_1)$  slik at

$$\int_{\Omega} fg d\mu = \int_{\Omega} gh d\mu$$

for alle  $\mathcal{A}_0$ -målbare funksjoner  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Vis at funksjonen  $h$  er entydig  $\mu$ -n.o.

Løsning: Radon-Nikodym teoremet gir at det fins  $h : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  som er  $\mathcal{A}_0$ -målbare og oppfyller  $\int_A g d\nu_2 = \int_A gh d\nu_1$  for alle  $A \in \mathcal{A}_0$  og alle  $\mathcal{A}_0$ -målbare funksjoner  $g$ . For  $A \in \mathcal{A}_0$  og  $\mathcal{A}_0$ -målbare  $g$  vi har, ved bruk av 3a, at

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} fg d\mu &= \int_{\Omega} g d\nu_2 \\ &= \int_{\Omega} gh d\nu_1 \\ &= \int_{\Omega} gh d\mu. \end{aligned}$$

Når  $g = \chi_{\Omega}$  gir ovenstående at  $\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} h d\mu = \int_{\Omega} h d\nu_1 < \infty$ , så  $h \in L^1(\Omega, \mathcal{A}_0, \nu_1)$ . Hvis  $h'$  har samme egenskaper, det følger at

$$\int_{\Omega} gh d\mu = \int_{\Omega} gh' d\mu,$$

så  $\int_A g d\nu_2 = \int_A gh d\nu_1 = \int_A gh' d\nu_1$ , og dermed er  $h = h'$   $\nu_1$ -n.o. av entydighet i Radon-Nikodym teoremet.

**Oppgave 4.** Betrakt målrommet bestående av  $\mathbb{R}$  med Lebesguemålet  $\lambda$  på Borel  $\sigma$ -algebraen  $\mathcal{B}$ . La  $1 < p < \infty$ , og antar at  $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  og  $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ . For  $x \in \mathbb{R}$ , sett  $(g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x - y)f(y) d\lambda(y)$ , og sett  $h(x) = \int_{\mathbb{R}} |g(x - y)f(y)| d\lambda(y)$ .

**Oppgave 4a.** Forklar hvorfor  $h$  er Borel målbar. La  $q$  være det positive tallet slik at  $1/p + 1/q = 1$ . Vis at for enhver funksjon  $k \in L^q(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$  slik at  $\|k\|_q \leq 1$ , det gjelder at

$$\left| \int_{\mathbb{R}} h(x)k(x) d\lambda(x) \right| \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

Løsning: Av Tonelli's teorem er  $h$  målbar siden  $f, g$  er målbare. Videre, ved å bruke translasjoninvarians av  $\lambda$  på  $\mathbb{B}$ , vi har

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)k(x) d\lambda(x) \right| &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)f(y)| d\lambda(y) \right) k(x) d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)k(x)| d\lambda(x) \right) |f(y)| d\lambda(y) \quad (\text{Tonelli}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x)k(x)| d\lambda(x) \right) |f(y)| d\lambda(y) \\ &\leq \|g\|_p \|k\|_q \int_{\mathbb{R}} |f(y)| d\lambda(y) \quad (\text{Hölder}) \\ &\leq \|f\|_1 \|g\|_p. \end{aligned}$$

**Oppgave 4b.** Begrunn at  $h \in L^p(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \lambda)$ , og vis at

$$\|h\|_p = \sup \left\{ \left| \int_{\mathbb{R}} h(x)k(x) d\lambda(x) \right| \mid \|k\|_q \leq 1 \right\}.$$

Løsning: Den lineære funksjonale  $\varphi : L^q \rightarrow \mathbb{C}$  gitt ved

$$\varphi(k) = \int_{\mathbb{R}} h(x)k(x) d\lambda(x)$$

er begrenset, ifølge (4a). Riesz representasjon teoremet gir derfor at det fins  $h' \in L^p$  s.a.  $\varphi(k) = \int_{\mathbb{R}} h'(x)k(x) d\lambda(x)$  for alle  $k \in L^q$ . Teoremet sier også at  $h'$  er entydig  $\lambda$ -n.o. Derfor blir  $h = h'$   $\lambda$ -n.o., så  $h \in L^p$ . Det ønskede likhetstegnet følger fordi Riesz representasjon teoremet sier også at  $h \mapsto \Phi_h$  er en isometri av Banachrom, hvor  $\Phi_p(k) = \varphi(k)$ .

**Oppgave 4c.** (10 poeng) Konkluder at  $\|g * f\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p$ .

Løsning: Det gjelder, at

$$\begin{aligned} \|g * f\|_p^p &= \int_{\mathbb{R}} |(g * f)(x)|^p d\lambda(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \int_{\mathbb{R}} g(x-y)f(y) d\lambda(y) \right|^p d\lambda(x) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} |g(x-y)f(y)| d\lambda(y) \right)^p d\lambda(x) \\ &= \|h\|_p^p, \end{aligned}$$

og det ønskede følger av (4a) og (4b).

END