UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 252 — Mangfoldigheter.
Eksamensdag:	Onsdag 17. desember 1997.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

En funksjon $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ er gitt ved

$$f(x, y, z, t) = x + yt + zt^2 + t^4$$

La $N \subset \mathbf{R}^4$ være definert ved likningen $f = 0$ og $M \subset N$ ved likningene $f = \frac{\partial f}{\partial t} = 0$.

a) Vis at N er en mangfoldighet i $\mathbf{R}^4$ diffeomorf med $\mathbf{R}^3$.

b) Vis at M er en mangfoldighet i N diffeomorf med $\mathbf{R}^2$.

La $p : N \to \mathbf{R}^3$ være restriksjonen til N av projeksjonen $\pi(x, y, z, t) = (x, y, z)$.

c) Bestem mengden C_p av kritiske punkter for p og mengden D_p av kritiske verdier.

Oppgave 2.

La $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ være kartlagt ved stereografiske projeksjoner $\xi : U \to \mathbf{R}^n$ og $\eta : V \to \mathbf{R}^n$,

$$\xi(x) = \frac{1}{1 + x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n) \qquad \eta(x) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \ldots, x_n)$$

(Fortsettes side 2.)

a) Vis at ξ og η er motsatt orientert med hensyn på enhver orientering av S^n.

b) Konstruer en n-form $\omega \in \Omega^n(S^n)$ som ikke forsvinner i noe punkt og slik at $\omega|U = f\, d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n$ med $f > 0$.

Oppgave 3.

Bestem de Rham kohomologien $H^k(S^1 \times S^2)$ for $k \geq 0$.

Oppgave 4.

La $\epsilon : \mathbf{R} \to S^1 \subset \mathbf{C}$ være overdekningsavbildningen

$$\epsilon(t) = e^{it}$$

a) Forklar at hvis $f : S^1 \to S^1$ er en glatt avbildning, så fins en glatt funksjon $\overline{f} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ slik at $\epsilon \circ \overline{f} = f \circ \epsilon$, entydig bestemt opp til et konstant tillegg $2k\pi$, der k er et heltall.

b) Orienter S^1 slik at ϵ er orienteringsbevarende og vis at

$$\int_{S^1} \omega = \int_{[0,2\pi]} \epsilon^* \omega$$

for enhver $\omega \in \Omega^1(S^1)$.
(Vink: Betrakt først tilfellet der $\operatorname{supp} \omega \subset S^1 - \{1\}$.)

c) Angi en ω slik at $\epsilon^*\omega = dt$. Vis at $\deg f = \frac{1}{2\pi}(\overline{f}(2\pi) - \overline{f}(0))$, der $\deg f$ står for graden til f.

d) Vis at om $f(-z) = -f(z)$ holder for alle $z \in S^1$, så har f odde grad.
(Vink: Undersøk $\overline{f}(t + \pi)$.)

SLUTT