UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 252 — Mangfoldigheter.
Eksamensdag:	Fredag 10. desember 1999.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) Avgjør hvilke av følgende tre former på $\mathbf{R}^3 - \{o\}$ er lukkete og hvilke eksakte:

$$t_1\,dt_1 + {t_1}^2{t_2}^2\,dt_2 + t_2t_3\,dt_3\ ,$$
$$r^{-3}({t_2}^3t_3 + t_2{t_3}^3)\,dt_1 + r^{-3}({t_3}^3t_1 + t_3{t_1}^3)\,dt_2 + r^{-3}({t_1}^3t_2 + t_1{t_2}^3)\,dt_3\ ,$$
$$3t_1{t_2}^2{t_3}^2dt_1 \wedge dt_2 + 2t_1{t_2}^3t_3dt_1 \wedge dt_3 + {t_2}^4{t_3}^2dt_2 \wedge dt_3\ ,$$

der $r = \sqrt{{t_1}^2 + {t_2}^2 + {t_3}^2}$ og t_1, t_2, t_3 er standardkoordinatene.

La $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ være gitt ved $f(x,y,z) = (x^2 - y^2 + 2xz,\ 2xy - 2yz)$. La $H_s \subset \mathbf{R}^3$ være planet $z = s$ ($s \in \mathbf{R}$).

b) Vis at mengden C_s av kritiske punkter for $f|H_s$ er en glatt mangfoldighet.

c) Avgjør om $f|C_s$ er en immersjon for noen verdi av parameteren s.

La $g : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ være avbildningen

$$g(x,y) = (x^2 - y^2 + 2x,\ 2xy - 2y)$$

og la $N \subset \mathbf{R}^4$ være mengden av punkter $(x, y,\ g(x,y))$ der (x,y) varierer i $\mathbf{R}^2$ og W delmengden der (x,y) varierer i området $1 \le x^2 + y^2 \le 2$.

(Fortsettes side 2.)

d) Gjør rede for at N er en orienterbar undermangfoldighet av $\mathbf{R}^4$ og at W er et område med glatt rand.

e) La ω være formen $4\,dt_1 \wedge dt_2 + dt_3 \wedge dt_4$ restriktert til N. Beregn integralet $\int_W \omega$ med hensyn på en passende valgt orientering av N. Er ω eksakt på N? (Begrunn svaret).

Oppgave 2.

La N_k være $\mathbf{R}^n$ med k punkter fjernet ($k \geq 1$). Punktene kan vi eksempelvis ta som $(1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $(k, 0, \ldots, 0)$. Angi de Rham kohomologien $H^\bullet(N_1)$ og beregn kohomologien $H^\bullet(N_k)$ for vilkårlig $k > 1$.

Oppgave 3.

La $f : N \to P$ og $g : P \to Q$ være propre glatte avbildninger mellom orienterte n-mangfoldigheter. Vi antar P og Q sammenhengende.

a) Definer $\deg f$ og vis at $\deg(g \circ f) = \deg g \deg f$.

b) Vis at hvis $f(N) \neq P$, så er $\deg f = 0$.

c) Vis at $\deg f = \sum_i \deg f|N_i$, der N_i gjennomløper komponentene til N.

d) La $V \subseteq P$ være en ikke-tom sammenhengende åpen mengde og la $f_V : f^{-1}(V) \to V$ være avbildningen indusert av f. Vis at $\deg f = \deg f_V$.

e) Forklar at hvis $f : N \to P$ er en diffeomorfi, så er $\deg f$ lik 1 dersom f bevarer orienteringen og lik -1 dersom f reverserer orienteringen.

f) Vis at $\deg f$ er heltallig.

SLUTT