UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 252 — Mangfoldigheter.
Eksamensdag:	Mandag 17. desember 2001.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

a) La X være vektorfeltet på R^2 gitt ved

$$X(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$$

Vis at $\alpha : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved $\alpha(t,x,y) = (x\cos t + y\sin t), y\cos t - x\sin t)$ er flowen til X.

b) La Y være vektorfeltet $Y = \frac{\partial}{\partial y}$ og regn ut $L_X Y$ ved å bruke flowen i a).
Finn flowen til Y. Hva er $L_Y X$?

c) La Z være vektorfeltet $Z(x,y) = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}$, der a og b er reelle tall.
La $p = (x_0, y_0)$ være et punkt i $\mathbb{R}^2$ og finn betingelser på (x_0, y_0) og a og b for at det skal finnes et koordinatsystem rundt p slik at X og Z blir koordinatvektorfeltene.
(Du trenger ikke finne koordinatsystemet.)

(Fortsettes side 2.)

Oppgave 2.

La $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være gitt ved

$$F(x, y, z) = (x + y + z, xy + yz + zx, xyz)$$

a) Vis at de kritiske punktene til F er $\{(x, y, z) | x = y \text{ eller } x = z \text{ eller } y = z\}$.

b) La $F(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, w_0)$.
Vis at polynomet $g(t) = (t - x_0)(t - y_0)(t - z_0)$ bare avhenger av (u_0, v_0, w_0) og bruk dette til å finne $F^{-1}(u_0, v_0, w_0)$ og graden til F. ($\mathbb{R}^3$ har standard orientering og du kan her uten bevis gå utifra at F er proper.)

Oppgave 3.

Anta at M^n er en C^∞ mangfoldighet, N^n er en topologisk mangfoldighet og $f : N \to M$ er en lokal homeomorfi (dvs. ethvert punkt $p \in N$ har en omegn $\mathcal{U}$ slik at $f : \mathcal{U} \to f(\mathcal{U})$ er en homeomorfi).

a) Vis at N^n har en entydig bestemt C^∞ struktur slik at f blir en lokal diffeomorfi.

La nå N^n ha denne C^∞ strukturen.

b) Vis at hvis M^n er orienterbar så er N^n også orienterbar.
Er det omvendte også tilfellet? (Begrunn svaret.)

Oppgave 4.

La α være en k-form og β en ℓ-form med kompakt støtte på en C^∞ mangfoldighet M^n, der $n = k + \ell + 1$.

a) Vis at $\int_M d\alpha \wedge \beta = \int_{\partial M} \alpha \wedge \beta - (-1)^k \int_M \alpha \wedge d\beta$.
Forklar hvordan dette generaliserer delvis integrasjon.

b) Vis at wedge produkt av differensialformer induserer bilineære avbildninger

$$H^k(M) \times H^\ell(M) \to H^{k+\ell}(M)$$

og $\quad H^k(M) \times H^\ell_c(M) \to H^{k+\ell}_c(M)$.

La $\pi_1 : \mathbb{R}^{k+\ell} \to \mathbb{R}^k$ og $\pi_2 : \mathbb{R}^{k+\ell} \to \mathbb{R}^\ell$ være projeksjonene $\pi_1(x^1, \ldots, x^{k+1}) = (x^1, \ldots, x^k)$ og $\pi_1(x^1, \ldots, x^{k+\ell}) = (x^{k+1}, \ldots, x^{k+\ell})$.

c) Vis at $(\omega, \eta) \mapsto \pi_1^*\omega \wedge \pi_2^*\eta$ definerer bilineær avbildning

$$\mu : H^k_c(\mathbb{R}^k) \times H^\ell_c(\mathbb{R}^\ell) \to H^{k+\ell}_c(\mathbb{R}^{k+\ell}) \ .$$

Vis at μ er surjektiv.

SLUTT