UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	MA 252 — Mangfoldigheter.
Eksamensdag:	Onsdag 4. desember 2002.
Tid for eksamen:	09.00 – 15.00.
Oppgavesettet er på 2 sider.	
Vedlegg:	Ingen.
Tillatte hjelpemidler:	Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1.

La N og P være glatte mangfoldigheter av dimensjon n og p og la $f : N \to P$ være en glatt avbildning. La $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_p)$ være et kart i P sentrert i et punkt $f(a)$, og definer $Q \subseteq P$ ved likningene $\psi_1 = 0, \ldots, \psi_\ell = 0$.

a) Forklar at Q er en undermangfoldighet av P. Hva er dimensjonen?

b) Forklar at om avbildningen $\psi' \circ f$ med komponenter $\psi_1 \circ f, \ldots, \psi_\ell \circ f$ har rang ℓ i punktet a, så er $f^{-1}Q$ en undermangfoldighet av N i en omegn om a. Hva er dimensjonen?

Oppgave 2.

La $M(n)$ være vektorrommet av $n \times n$-matriser og $Sym(n)$ undervektorrommet av symmetriske matriser. La videre $O(n) \subset M(n)$ være undermengden av ortogonale matriser ($A^t A = I$).

a) Forklar kort at avbildningen $f : M(n) \to Sym(n)$ gitt ved

$$f(X) = X^t X$$

er glatt og beregn den deriverte $f'(A; X) = df_A(X)$ for vilkårlige $A, X \in M(n)$.

b) Vis at f er submersiv i hvert punkt $A \in O(n)$ og at $O(n)$ er en undermangfoldighet av $M(n)$. Hva blir dimensjonen av $O(n)$?

(Fortsettes side 2.)

c) Bestem tangentbunten til $O(n)$ som underbunt av produktbunten $O(n) \times M(n) \to O(n)$. Hva blir tangentrommet $TO(n)_I$ der I er identitetsmatrisen?

Oppgave 3.

La $p : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være polynomet

$$p(t, y) = t^2 - y_1 t + y_2$$

der t og y_1, y_2 er standardkoordinatene i $\mathbb{R}$ og $\mathbb{R}^2$, og $y = (y_1, y_2)$. La $W \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ være gitt ved likningen $p = 0$.

a) Vis at W er en glatt undermangfoldighet av $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$, diffeomorf med $\mathbb{R}^2$.

b) La $\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være avbildningen

$$\begin{aligned} \sigma_1(x_1, x_2) &= x_1 + x_2 \\ \sigma_2(x_1, x_2) &= x_1 x_2 \end{aligned}$$

Gi planet $\mathbb{R}^2$ en orientering og vis at graden til σ er veldefinert og lik 0. Hvorfor er det likegyldig hvilken orientering vi velger?

Oppgave 4.

a) Vis at det fins en glatt avbildning

$$H : (\mathbb{R}^n - o) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n - o$$

slik at $H(x, 0) = x$ og $H(x, 1) = x/|x|$, der $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.

b) La $i : S^{n-1} \to \mathbb{R}^n - o$ være inklusjonsavbildningen av enhetssfæren $|x| = 1$ i $\mathbb{R}^n - o$ ($n \geq 1$), og la $r : \mathbb{R}^n - o \to S^{n-1}$ være retraksjonen $r(x) = x/|x|$. Forklar at $i^* : H^k(\mathbb{R}^n - o) \to H^k(S^{n-1})$ er en isomorfi med invers r^* for alle $k = 0, 1, \ldots$.

c) En glatt 3-form ω på $\mathbb{R}^4 - o$ er gitt ved

$$\omega = (3x^2 \sin w + y\, e^z) dx \wedge dy \wedge dz + (x^3 \cos w + y^{117}) dy \wedge dz \wedge dw$$

der x, y, z, w er standardkoordinatene i $\mathbb{R}^4 - o$. Avgjør om ω er lukket, eksakt eller ingen av delene. Begrunn svarene.

d) En glatt 1-form ω på $\mathbb{R}^2 - o$ er gitt ved

$$\omega = \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

der x, y er standardkoordinatene i $\mathbb{R}^2 - o$. Avgjør om ω er lukket, eksakt eller ingen av delene. Begrunn svarene.

SLUTT