

Se Eilenberg–Steenrod (1952), chapter V, section 13 eller Spanier (1966), chapter 4, section 2, særlig for oppgave 4 nedenfor.

La $C_* = (C_n, \partial_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ være et kjedekompleks av abelske grupper. Betrakt de korte eksakte sekvensene

$$0 \rightarrow Z_n := \ker(\partial_n) \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{j_n} B_{n-1} := \operatorname{im}(\partial_n) \rightarrow 0.$$

Oppgave 1: Vis at dersom C_* er et fritt kjedekompleks (hver C_n er fri), så splitter disse sekvensene, dvs. det finnes homomorfier $r_n: C_n \rightarrow Z_n$ og $s_n: B_{n-1} \rightarrow C_n$ med $r_n i_n = \operatorname{id}$, $i_n r_n + s_n j_n = \operatorname{id}$ og $j_n s_n = \operatorname{id}$.

Oppgave 2: Vis at dersom sekvensene splitter og C_* er eksakt ($H_n(C_*) = 0$ for alle n), så er C_* kjedekontraktibelt, dvs. det finnes en kjedehomotopi $0 \simeq \operatorname{id}_{C_*}$.

La X_* og Y_* være kjedekomplekser. Gitt en kjedeavbildning $f: X_* \rightarrow Y_*$, la avbildningskjeglen Cf_* være gitt ved $Cf_n = X_{n-1} \oplus Y_n$ og

$$\partial_n(x, y) = (-\partial_{n-1}(x), \partial_n(y) + f(x)).$$

Vi sier at f er en kvasiisomorfi dersom $H_n(f): H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ er en isomorfi for alle $n \in \mathbb{Z}$. Vi vet fra tidligere at dersom f er en kjedehomotopiekvivalens, så er den en kvasiisomorfi.

Oppgave 3: Vis at Cf_* er et kjedekompleks, og at det er en lang eksakt sekvens

$$\cdots \rightarrow H_n(X) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(Y) \rightarrow H_n(Cf_*) \rightarrow H_{n-1}(X) \rightarrow \cdots$$

Oppgave 4: Vis at dersom Cf_* er kjedekontraktibelt, så er $f: X_* \rightarrow Y_*$ en kjedehomotopiekvivalens.

Oppgave 5: Utled at hvis $f: X_* \rightarrow Y_*$ er en kvasiisomorfi mellom frie kjedekomplekser, så er f en kjedehomotopiekvivalens.

Oppgave 6 (hvis for mye tid): La $R = \mathbb{Z}/4$. Kjedekomplekset C_* med $C_n = R$ og $\partial_n(x) = 2x$ for alle $n \in \mathbb{Z}$ og $x \in R$ er fritt og eksakt som kompleks av R -moduler. Vis at C_* ikke er kjedekontraktibelt i denne kategorien, slik at resultatet i oppgave 5 ikke gjelder dersom abelske grupper erstattes med R -moduler.

Oppgave 7: (hvis alt for mye tid): Vis at dersom R i stedet er en ring med endelig global dimensjon, så gjelder resultatet i oppgave 5 for kjedekomplekser av frie (eller projektive) R -moduler.

Se Dold, §3, side 287, for hvordan denne homologiske dimensjonsbetingelsen kommer til nytte her.

Referanser:

- Albrecht Dold, *Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe*, Math. Ann. 140 (1960), 278–298.
- Samuel Eilenberg and Norman Steenrod, *Foundations of algebraic topology*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1952.
- Edwin H. Spanier, *Algebraic topology*, McGraw-Hill Book Co., New York–Toronto–London, 1966.