Obligatorisk oppgave MAT4640 -Våren 2011

Innlevering senest 24.03.2011 klokken 14.30

Besvarelsen kan

- sendes til foreleser i pdf-format som vedlegg til e-post med "subject" Oblig4640-Navn
- leveres i papirformat til foreleser
- legges i instituttets mottakskasse på vanlig måte.

Besvarelsen må i alle tilfeller merkes ned navn og emnenavn.
Forelesers e-postadresse er dnormann@math.uio.no.

Fristen for innlevering er torsdag 24.03.2011. Oppgavesettet består av tre korte oppgaver og en lang. For å få besvarelsen godkjent, må minst halvparten av punktene være tilfredsstillende besvart, og man må ha gjort forsøk på å løse alle de fire oppgavene.
Ellers gjelder de vanlige reglene ved Matematisk institutt hva angår samarbeid og selvstendighet.

Oppgave 1

La α og β være to grenseordinaltall, og anta et det finnes en strengt voksende funksjon $f : \alpha \to \beta$ som er kofinal i β.
Vis at α og β har samme kofinalitet.

Oppgave 2

La κ være et kardinaltall. La X være mengden av begrensede delmengder av κ^+.
Vis at $|X| = 2^\kappa$.
[Det er lov å bruke utvalgsaksiomet]

Oppgave 3

La f og g være funksjoner fra ω til ω. Vi sier at f *dominerer* g hvis $f(n) \geq g(n)$ for alle $n \in \omega$.
La $\kappa < 2^\omega$ være et kardinaltall, og anta Martins aksiom $\mathbf{M}(\kappa)$.
La $f_\alpha : \omega \to \omega$ for hver $\alpha \in \kappa$.
Vis at det finnes en funksjon $g : \omega \to \omega$ som ikke er dominert av noen f_α.

Bemerkning Det er en kjent sak at det topologiske rommet $\mathbb{N}^\mathbb{N}$ ikke er σ-kompakt, det vil si, det er ikke en tellbar union av kompakte mengder. I følge resultatet fra denne oppgaven vil rommet heller ikke være κ-kompakt for noen $\kappa < 2^\omega$ hvis vi antar Martins aksiom.

Oppgave 4

La α være et ordinaltall. Vi lar S_α være mengden av endelige sekvenser

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$$

hvor hver $\alpha_i \in \alpha$. Vi tillater den tomme sekvensen, det vil si at $n = 0$.
Vi definerer *Kleene-Brouwer ordningen* $\prec$ på S_α ved at $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \prec (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ hvis $(\beta_1, \ldots, \beta_m)$ er en ekte delsekvens av $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ eller hvis det finnes en minste $i \leq \min\{n, m\}$ slik at $\alpha_i \neq \beta_i$, og da er $\alpha_i < \beta_i$.

a) Vis at $\prec$ er en total ordning av S_α.

Et α-tre er en ikke-tom mengde $T \subseteq S_\alpha$ slik at om $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T$ og $0 \leq m \leq n$, så er $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in T$.
Et α-tre T kalles *velfundert* hvis det ikke finnes noen uendelig følge $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ slik at $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T$ for alle $n \in \omega$.

b) La T være et α-tre. Vis at følgende er ekvivalente:

- T er velfundert.
- Kleene-Brouwer-ordningen, begrenset til T, er en velordning.

c) La $\kappa = |\alpha|$ og la $\beta < \kappa^+$.
Vis at det finnes et velfundert α-tre T slik at ordningstypen til Kleene-Brouwer-ordningen av T er minst β.

Fra nå av lar vi T være et velfundert α-tre. Vi lar Φ være klassen av alle funksjoner med α som definisjonsområde, vi lar g være en funksjon definert på S_α og vi lar F være en klassefunksjon definert på klassen Φ.

d) Vis at det finnes en funksjon f definert på S_α som oppfyller

   - $f((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = g((\alpha_1, \ldots, \alpha_n))$ hvis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ ikke er i T.
   - Hvis $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in T$ lar vi

     $$h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}(\beta) = f((\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta)$$

     for $\beta \in \alpha$ og vi skal ha at

     $$f((\alpha_1, \ldots, \alpha_n)) = F(h_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}).$$

   Hint: Det kan lønne seg å bruke transfinit rekursjon på Kleene-Brouwer-ordingen av T, men det er strengt tatt ikke nødvendig.

Dag Normann